4 Die Laplace-Gleichung

4.1 Darstellungsformeln

Wir betrachten die allgemeine *Poisson-Gleichung*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f = 0$ in Ω, so heißt die obige Gleichung auch *Laplace-Gleichung*, und u heißt *harmonisch.*

Lemma 4.1 *Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ radialsymmetrisch, d.h. $u(x) = v(r)$, $r = |x|$, mit einer Funktion $v : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, gilt*

$$\boxed{\Delta u = \partial_r^2 u + \tfrac{n-1}{r} \partial_r u}\,. \tag{4.1}$$

Der Einfachheit halber schreibt man auch $u(x) = u(r)$ und $\Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r$. Der Beweis von (4.1) ergibt sich durch Nachrechnen.

Gesucht werden vorerst alle radialsymmetrischen harmonischen Funktionen u auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Nach (4.1) gilt für $r > 0$

$$0 = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r,$$

so dass $v = u_r$ die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $v_r = -\frac{n-1}{r}\, v$ erfüllt. Also ist

$$u_r(r) = c_0 r^{1-n}$$

und folglich

$$u(r) = c_1 + c_0 \begin{cases} \log r\,, & n = 2 \\ \frac{1}{2-n}\, r^{2-n}\,, & n \geq 3 \end{cases}.$$

Mit $c_1 = 0$ und einer speziellen Wahl von c_0 gelangen wir zur folgenden Definition.

Definition 4.2 Es bezeichne $\omega_n = |\partial B_1|$ das Oberflächenmaß der n–dimensionalen Einheitskugel, vgl. Definition 3.1. Dann heißt

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n}\, r^{2-n}\,, & n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi}\, \log r\,, & n = 2 \end{cases}$$

die *Fundamentallösung* zum *Laplace-Operator* $-\Delta$.

Satz 4.3 (Greensche Formel) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, so dass partielle Integration nach dem Satz von Gauß erlaubt ist. Dann gilt für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und für alle $x \in \Omega$ die Integraldarstellung*

$$\begin{aligned} u(x) \quad &= \quad \int_\Omega E(x-y)(-\Delta u)(y)dy \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial N}(y)\, E(x-y) - u(y)\, \frac{\partial}{\partial N_y}\, E(x-y) \Big)\, do_y\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

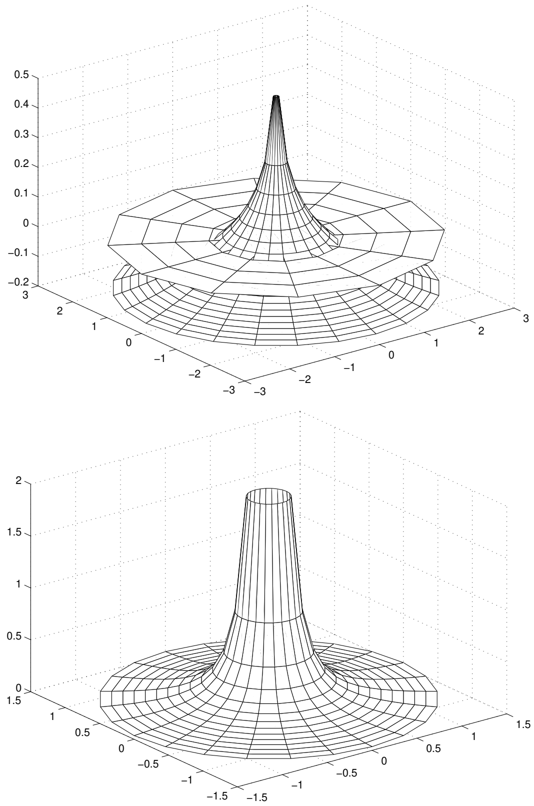

Abbildung 4.1: Die Fundamentallösungen $E(x) = \frac{1}{4\pi r}$ $(n = 3)$ und $E(x) = -\frac{1}{2\pi} \log r$ $(n = 2)$

Dabei bedeutet $u \in C^2(\overline{\Omega})$, dass u in $C^2(\Omega)$ liegt und u sowie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von u auf Ω zu (beschränkten) stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar sind. Damit sind alle Integrale in (4.2) wohldefiniert. Der Ausdruck $\partial/\partial N_y$ deutet an, dass die Normalableitung auf $\partial\Omega$ bzgl. der Variablen y und nicht bzgl. x in $E(x-y)$ berechnet wird. Bevor wir zum Beweis von Satz 4.3 kommen, geben wir drei wichtige Folgerungen an.

Korollar 4.4 (1) *Für jede Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger gilt*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)(-\Delta u)(y)\, dy = E * (-\Delta u)(x)\,. \tag{4.3}$$

(2) *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ harmonisch, gilt*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial N}\, u(y)\, E(x-y) - u(y)\, \frac{\partial}{\partial N_y}\, E(x-y) \Big)\, do_y\,. \tag{4.4}$$

(3) *Jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$ ist unendlich oft stetig partiell differenzierbar und sogar reell analytisch in $x_1, \dots, x_n$.*

Beweis von Korollar 4.4

(1) Wählt man ein glatt berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, welches den Träger $\operatorname{supp} u$ enthält, folgt (4.3) aus (4.2), denn die Randintegrale über $\partial\Omega$ verschwinden.

(2) (4.4) folgt sofort aus (4.2), falls $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt. Ist jedoch nur $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, betrachtet man die Darstellung (4.2) auf einer Folge von beschränkten, glattberandeten Gebieten (Ω_k) mit

$$\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \ldots \subset \Omega\,,$$

die das Gebiet Ω für $k \to \infty$ in einem gewissen Sinne ($\Omega_k \to \Omega$) ausschöpfen. Da (4.2) auf Ω_k gilt und partielle Ableitungen zweiter Ordnung in (4.2) für die harmonische Funktion u nicht benötigt werden, folgt (4.4) für $k \to \infty$. Auf weitere Details dieses Approximationsarguments soll hier nicht eingegangen werden.

(3) Für $x_0 \in \Omega$ mit $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ benutze man die Integraldarstellung (4.4) in der Form

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x_0)} \Big(\frac{\partial u}{\partial N}\, E(x-y) - u\,\frac{\partial}{\partial N_y}\, E(x-y)\Big)\, do_y$$

für $x \in B_r(x_0)$. Da $E(x-y)$ und $\frac{\partial}{\partial N_y}\, E(x-y)$ für $y \in \partial B_r(x_0)$ beliebig oft bzgl. x partiell differenzierbar und sogar reell analytisch sind, ist auch $u(x)$ glatt und sogar reell analytisch.

Beweis von Satz 4.3 Der Beweis beginnt mit dem Integral $\int E(x-y)\,\Delta u(y)\,dy$ und zweifacher partieller Integration. Da $E(x-y)$ jedoch für $y \to x$ singulär wird, wird zuvor die Kugel $B_\varepsilon(x)$ aus Ω herausgeschnitten. Auf dem Integrationsgebiet $\Omega \backslash B_\varepsilon(x)$ erhält man mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(x)} E(x-y)\,\Delta u(y)\,dy \\ &\quad = \int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(x)} \Delta_y\, E(x-y)\, u(y)\,dy \\ &\quad + \Big(\int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\varepsilon(x)}\Big) \Big(E(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial}{\partial N_y}\, E(x-y) u\Big)\, do_y\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Da $\Delta_y\, E(x-y) = 0$ für $x \neq y$ gilt, verschwindet das erste Integral auf der rechten Seite. Für den Grenzübergang $\varepsilon \to 0+$ beachte man für $y \in \partial B_\varepsilon(x)$, also $|y-x| = \varepsilon$, die Wachstumsabschätzungen

$$|E(x-y)| = O(\varepsilon^{2-n}) \text{ für } n \geq 3, \quad |E(x-y)| = O(|\log\varepsilon|) \text{ für } n = 2$$

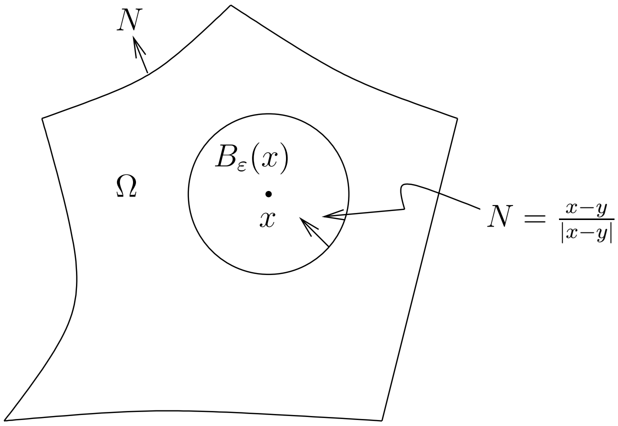

Abbildung 4.2: Zum Beweis von Satz 4.3

sowie $|\partial B_\varepsilon(x)| = \omega_n \varepsilon^{n-1}$. Wegen $u \in C^1(\Omega)$ folgt damit

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} E(x-y)\frac{\partial u}{\partial N} do_y \to 0 \quad \text{für}\, \varepsilon \to 0+ .$$

Im zweiten Randintegral über $\partial B_\varepsilon(x)$, wo $N_y = \frac{x-y}{|x-y|}$ gilt, beachte man die Identität

$$\frac{\partial}{\partial N_y} E(x-y) = \frac{1}{\omega_n}\frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot \frac{x-y}{|x-y|} = \frac{1}{\omega_n}\varepsilon^{1-n} = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}.$$

Deshalb liefert die Stetigkeit von u in x die entscheidende Konvergenzaussage

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial N_y} E(x-y)u(y) do_y = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) do_y \to u(x)$$

für $\varepsilon \to 0+$. Schließlich konvergiert $\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)} E(x-y)\Delta u(y)dy$ wegen der Beschränktheit von Δu auf $\overline{\Omega}$ und der lokalen Integrierbarkeit der Singularität $|x-y|^{2-n}$ im $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ bzw. $\log|x-y|$ im $\mathbb{R}^2$ für $\varepsilon \to 0+$ gegen das entsprechende Integral auf Ω. Somit ist das Verhalten aller Integrale in (4.5) für $\varepsilon \to 0+$ geklärt und (4.2) bewiesen. ■

Da die Randintegrale in (4.2) harmonische Funktionen in x darstellen, ist es nahe liegend, das Poisson-Problem $-\Delta u = f$ für eine stetige Funktion f mittels des Faltungsintegrals $E * (-\Delta u) = E * f$ zu lösen, vgl. (4.3). Während die Singularitäten (für $y \sim x$) in den Integralen

$$\int_\Omega E(x-y)f(y)dy \qquad \text{und} \qquad \int_\Omega \nabla_x E(x-y)f(y)dy$$

für jedes $f \in C^0(\overline{\Omega})$ noch integrierbar sind, ist die Singularität $|\partial_i\partial_j E(x-y)| \approx \frac{1}{|x-y|^n}$, $1 \leq i, j \leq n$, nicht mehr integrierbar. Tatsächlich gibt es *stetige* Funktionen

f, so dass $E * f$ nicht zweimal partiell differenzierbar ist. Dieses Problem ist jedoch lösbar, falls f *Hölder-stetig* auf $\overline{\Omega}$ ist, d.h., es gibt ein $\alpha \in (0,1)$ und eine Konstante $K = K(f)$, so dass die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha \quad \text{für alle} \quad x, y \in \Omega$$

gilt. Unter dieser Voraussetzung existieren die partiellen Ableitungen $\partial_i \partial_j u$ und sind ebenfalls Hölder-stetig auf $\overline{\Omega}$ zum Exponenten α. Anstelle des technisch aufwändigen Beweises soll hier nur der einfachere Fall mit $f \in C^2(\overline{\Omega})$ untersucht werden.

Korollar 4.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und*

$$u(x) = \int_\Omega E(x-y) f(y)\, dy.$$

(1) *Die Funktion u ist stetig partiell differenzierbar, und es gilt*

$$\nabla u(x) = \int_\Omega \nabla_x E(x-y)\, f(y)\, dy. \tag{4.6}$$

(2) *Liegt f sogar im Raum $C^1(\overline{\Omega})$, ist u zweimal stetig partiell differenzierbar und eine spezielle Lösung des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω.*

Beweis

(1) Die üblichen Konvergenzsätze können nicht zum Beweis der Aussage $\frac{1}{h}(u(x + h\, e_i) - u(x)) \to \partial u / \partial x_i$ für $h \to 0+$, $1 \leq i \leq n$, benutzt werden, da der Term $E(x + h\, e_i - y)$ eine mit h wandernde Singularität in $y = x + h\, e_i$ besitzt. Stattdessen werden eine Abschneidefunktion $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta(t) = 0 \;\text{ für } |t| \leq 1, \quad \eta(t) = 1 \;\text{ für } |t| \geq 2, \quad 0 \leq \frac{d\eta}{dt} \leq 2$$

und $\eta_\varepsilon(y) = \eta(\frac{|y|}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, benutzt. Ersetzt man $E(x-y)$ durch $(\eta_\varepsilon E)(x-y)$, erhält man die beliebig oft differenzierbare Funktion

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega (\eta_\varepsilon E)(x-y)\, f(y)\, dy,$$

die für $\varepsilon \to 0+$ gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ gegen u konvergiert. Insbesondere ist u stetig auf $\overline{\Omega}$. Für den gewünschten Gradienten

$$w(x) = \int_\Omega \nabla_x E(x-y)\, f(y)\, dy$$

von $u(x)$, der auf Grund der Abschätzung $|\nabla_x E(x-y)| = O(|x-y|^{1-n})$ für jedes $x \in \overline{\Omega}$ existiert, gilt dann

$$w(x) - \nabla u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \nabla\left((1-\eta_\varepsilon)E\right)(x-y)f(y)\,dy.$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |w(x) - \nabla u_\varepsilon(x)| &\le \|f\|_\infty \int_{|x-y|\le 2\varepsilon} \left(|\nabla E| + \frac{2}{\varepsilon}|E|\right)(x-y)\,dy \\ &\le \|f\|_\infty\, c\,\varepsilon\big(1 + (|\log\varepsilon|, \quad \text{falls } n=2)\big). \end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge der stetigen Funktionen (∇u_ε) für $\varepsilon \to 0+$ gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ gegen w. Da bereits $u_\varepsilon \to u$ gezeigt wurde, gilt $w = \nabla u$ und $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

(2) Ist $f \in C^1(\overline{\Omega})$, liefert eine partielle Integration in (4.6)

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &= -\int_\Omega \nabla_y\, E(x-y)f(y)\,dy \\ &= \int_\Omega E(x-y)\nabla f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)f(y)\,N(y)\,do_y; \end{aligned}$$

dabei muss im Beweis die partielle Integration zuerst über $\Omega\backslash B_\varepsilon(x)$ und ein anschließender Grenzübergang $\varepsilon \to 0+$ wie im Beweis von Satz 4.3 durchgeführt werden. Da ∇f beschränkt auf $\overline{\Omega}$ ist, können nach (1) partielle Ableitungen zweiter Ordnung von u angegeben werden. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \partial_{x_i} E(x-y)\partial_i f(y)dy - \int_{\partial\Omega} \partial_{x_i} E(x-y)f(y)N_i(y)\,do_y\right) \\ &= -\int_\Omega \nabla_y\, E(x-y)\,\cdot\,\nabla f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial N_y}(x-y)f(y)\,do_y. \end{aligned}$$

Zur Vorbereitung einer weiteren partiellen Integration im ersten Integral wird Ω durch $\Omega\backslash B_\varepsilon(x)$ ersetzt. Da $\Delta E(x-y) = 0$ für $x \neq y$ ist und sich die Randintegrale über $\partial\Omega$ aufheben, liefert der Grenzübergang

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial E}{\partial N_y}(x-y)f(y)do_y \to -f(x) \quad \text{für}\,\varepsilon \to 0+,$$

s. Beweis von Satz 4.3, die Behauptung $-\Delta u = f$. ■

Die abschließende Darstellungsformel (4.7), die sog. Mittelwertformel, ist entscheidend für den Beweis des Maximum- und Minimumprinzips im Abschnitt 4.2. Diese wichtigen Prinzipien zur Abschätzung von Lösungen werden jedoch nicht nur für Lösungen von partiellen Differential*gleichungen* benötigt, sondern auch für „Lösungen“ von Differential*ungleichungen*. Dementsprechend wird der Begriff der harmonischen Funktion wie folgt verallgemeinert:

Definition 4.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{subharmonisch} \\ \textit{harmonisch} \\ \textit{superharmonisch} \end{array}\right\}, \quad \textit{falls} \quad \left\{\begin{array}{l} -\Delta u \leq 0 \\ -\Delta u = 0 \\ -\Delta u \geq 0 \end{array}\right\} \quad \textit{in } \Omega \textit{ gilt.}$$

Als Beispiel erwähnen wir, dass auf $\mathbb{R}$ die Begriffe subharmonisch und konvex, superharmonisch und konkav sowie harmonisch und affin linear jeweils übereinstimmen. Im R^n, $n \geq 2$, sind die zuvor eingeführten Begriffe jedoch wesentlich allgemeiner als die Begriffe Konvexität etc.

Satz 4.7 (Mittelwertformel) *Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gelten für alle Kugeln $B_R(x)$ mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ die Darstellungen*

$$u(x) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y)\, do \tag{4.7}$$

und

$$u(x) = \frac{n}{w_n R^n} \int_{B_R(x)} u(y)\, dy. \tag{4.8}$$

Ist u sub- oder superharmonisch, muss in beiden Formeln das Gleichheitszeichen durch $\leq$ bzw. durch $\geq$ ersetzt werden.

Beweis Aus dem Beweis von Lemma 3.2 (Gleichung von Darboux) ist die Identität

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy = r^{n-1} \partial_r \Big(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} u\, do \Big) = r^{n-1} \partial_r M_u(x,r) \tag{4.9}$$

bekannt. Folglich ist $M_u(x,r)$ als Funktion von $r \geq 0$ konstant bzw. $\left\{\begin{array}{l} \text{monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \end{array}\right\}$, wenn u harmonisch bzw. $\left\{\begin{array}{l} \text{subharmonisch} \\ \text{superharmonisch} \end{array}\right\}$ ist. Ferner ist $M_u(x,0) = u(x)$. Im Fall einer subharmonischen Funktion u gilt also

$$u(x) = M_u(x,0) \leq M_u(x,r) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u\, do.$$

Damit ist (4.7) (in Ungleichungsform) für subharmonische Funktionen bewiesen. Integriert man die Ungleichung

$$\omega_n r^{n-1} u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u\, do$$

bzgl. r von 0 bis R, folgt nach Division durch $\omega_n\, R^n/n$ die Aussage (4.8) als Ungleichung. Analog erhält man die gewünschten Ungleichungen für superharmonische Funktionen. Da eine harmonische Funktion sowohl sub- als auch superharmonisch ist, folgen (4.7) und (4.8) für harmonische Funktionen. ∎

4.2 Maximum- und Minimumprinzip

Satz 4.8 (Schwaches Maximum- und Minimumprinzip) *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet und* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(1) *Ist* u *subharmonisch, gilt*

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u\,. \tag{4.10}$$

(2) *Ist* u *superharmonisch, gilt*

$$\inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u\,. \tag{4.11}$$

Beweis Sei u subharmonisch. Da Ω beschränkt und u stetig auf $\overline{\Omega}$ ist, nimmt u sein Maximum in einem Punkt $x_0 \in \overline{\Omega}$ an. Würde x_0 in Ω liegen, folgt $\Delta u(x_0) \le 0$. Dabei ist $\Delta u(x_0) < 0$ ausgeschlossen, denn u ist subharmonisch.

Um den möglichen Fall $\Delta u(x_0) = 0$ zu umgehen, betrachten wir $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$, $\varepsilon > 0$, statt u. Wegen $-\Delta v_\varepsilon = -\Delta u - 2n\varepsilon < 0$ ist v_ε in Ω subharmonisch. Nach dem obigen Beweisteil kann v_ε sein Maximum nur auf $\partial\Omega$ annehmen, d.h.

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \le \sup_{\overline{\Omega}} (u + \varepsilon|x|^2) = \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon|x|^2)\,.$$

Für $\varepsilon \to 0+$ folgt daraus $\sup_{\overline{\Omega}} u \le \sup_{\partial\Omega} u$ und damit die Behauptung.

Ist u superharmonisch, wird die Aussage analog bewiesen. ■

Korollar 4.9 (Eindeutigkeitssatz) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet, sei* $f \in C^0(\Omega)$ *und* $g \in C^0(\partial\Omega)$. *Dann besitzt das Dirichlet-Problem*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad && \textit{in} \quad \Omega \\ u &= g && \textit{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

höchstens *eine Lösung* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Beweis Seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ Lösungen des Dirichlet-Problems. Dann löst $v = u_1 - u_2$ die homogene Gleichung

$$-\Delta v = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Nach Satz 4.8 genügt v dem schwachen Maximum- und Minimumprinzip. Daraus folgt $v = 0$ und $u_1 = u_2$. ■

Eine Verschärfung des schwachen Maximum- und Minimumprinzips Satz 4.8 wird mit der Mittelwertformel (4.8) bewiesen.

Satz 4.10 (Starkes Maximum- und Minimumprinzip) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein (beschränktes oder unbeschränktes) Gebiet und sei* $u \in C^2(\Omega)$ *sub- bzw. superharmonisch. Falls es einen Punkt* $x_0 \in \Omega$ *mit der Eigenschaft*

$$u(x_0) = \sup_{\Omega} u \quad bzw. \quad u(x_0) = \inf_{\Omega} u$$

gibt, ist u *konstant. Insbesondere kann eine harmonische Funktion ihr Maximum oder Minimum* nicht in Ω *annehmen, falls die Funktion nicht konstant ist.*

Beweis Sei u subharmonisch und gelte $u(x_0) = \sup_{\Omega} u$. Nach (4.8) gilt für jede Kugel $B_R(x_0)$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$

$$u(x_0) \leq \frac{n}{w_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy \leq \sup_{\Omega} u = u(x_0)\,.$$

Deshalb stimmt u auf $B_R(x_0)$ mit $u(x_0)$ überein.

Zum Abschluss des Beweises wird ein topologisches Argument benutzt. Sei $M = \{y \in \Omega : u(y) = u(x_0)\}$. Nach Voraussetzung ist $M \neq \emptyset$. Die Stetigkeit von u impliziert die relative Abgeschlossenheit von M in Ω. Schließlich zeigt der erste Beweisschritt, dass M auch offen ist. Da Ω ein Gebiet ist, folgt $M = \Omega$; die Funktion u ist also auf Ω konstant gleich $u(x_0)$. ∎

Das einfache Beweisprinzip von Satz 4.8 kann auf viel allgemeinere Situationen übertragen werden, in denen u.a. der Laplace-Operator durch einen allgemeinen elliptischen Operator zweiter Ordnung ersetzt wird. Anschließend gestatten die aus dem Maximum- und Minimumprinzip hergeleiteten Aussagen *a priori*–Abschätzungen von Lösungen, die nicht explizit bestimmt werden können.

Definition 4.11 Auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seien stetige, beschränkte Funktionen a_{ij}, b_i, c: $\Omega \to \mathbb{R}$ mit $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq j \leq n$, gegeben. Die aus den Funktionen $a_{ij}(x)$ gebildete Matrixfunktion $A(x) = \big(a_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^n$ sei gleichmäßig positiv definit, d.h., es gebe eine positive Zahl α_0, so dass

$$\langle y, A(x)y \rangle := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j \geq \alpha_0 |y|^2$$

für alle $y = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dann heißt

$$Lu(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \partial_i u + c(x) u$$

ein *elliptischer Differentialoperator* zweiter Ordnung.

Bemerkung 4.12 (1) Im Fall $b_i = c = 0$ und $a_{ij} = \delta_{ij}$, also $A = I$, ist $L = -\Delta$.

(2) Der Fall konstanter Koeffizienten a_{ij}, b_i, c mit $b_i = c = 0$ kann durch eine Variablentransformation auf den Fall $-\Delta$ zurückgeführt werden. Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine konstante, invertierbare Matrix, $y = Qx$ und $v(y) = u(x)$. Dann rechnet man leicht die Formel

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j}$$

nach; dabei ist die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^n$ durch

$$\tilde{A} = Q^T A Q$$

definiert. Nach Voraussetzung ist die Matrix A symmetrisch und positiv definit. Also gibt es nach dem Satz über Hauptachsentransformationen eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n,n}$, so dass

$$S^T A S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: D$$

Diagonalgestalt mit den positiven Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A in der Diagonalen hat. Dann transformiert $Q := SD^{-1/2}$ mit $D^{-1/2} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \ldots, \lambda_n^{-1/2})$ die Matrix A auf $\tilde{A} = I$. Folglich gilt

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j u(x) = -\Delta_y v(y)\,.$$

(3) Der Beweis des folgenden Satzes 4.13 benötigt zur Untersuchung des Ausdrucks $\sum a_{ij} \partial_i \partial_j u$ eine spezielle Aussage aus der Linearen Algebra: Für symmetrische, positiv semidefinite Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ gilt

$$A : B := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij} = \operatorname{tr}(AB) \geq 0\,.$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{tr}(C) := \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}$ die Spur einer Matric $C = (c_{ij})$.

Beweis Es ist bekannt, dass die Spur die Eigenschaft $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ hat; insbesondere gilt für jede invertierbare Matrix C

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(C^{-1} A C)\,.$$

Also gilt mit der orthogonalen Matrix S und der Diagonalmatrix D aus Teil 2

$$A : B = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(S^T A\, S S^T\, B S) = \operatorname{tr}(D\tilde{B})\,,$$

wobei $\tilde{B}$ die positiv semidefinite Matrix $\tilde{B} = S^T B S$ bezeichnet. Da sowohl alle Diagonalelemente der Diagonalmatrix D als auch der Matrix $\tilde{B}$ nichtnegativ sind, folgt jetzt

$$A : B = \operatorname{tr}(D\tilde{B}) \geq 0\,.$$

Satz 4.13 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, L ein elliptischer Differentialoperator und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

(1) *Sei $c = 0$. Ist $Lu \le 0$ bzw. $Lu \ge 0$ in Ω, gilt das schwache Maximum- bzw. Minimumprinzip*

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \textit{bzw.} \quad \inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u\,. \tag{4.12}$$

(2) *Sei $c \ge 0$ und $Lu \le 0$ bzw. $Lu \ge 0$. Dann gilt*

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \textit{bzw.} \quad \inf_{\overline{\Omega}} u \ge \inf_{\partial\Omega} u^-\,, \tag{4.13}$$

wobei $u^+ = \max(u,0)$ und $u^- = \min(u,0)$ ist.

Beweis

(1) Statt u betrachten wir die Funktionen $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{dx_1}$ mit $\varepsilon > 0$, $d > 0$. Offensichtlich gilt

$$L(e^{dx_1})(x) = \big(-d^2 a_{11}(x) + d b_1(x)\big) e^{dx_1}\,.$$

Da die Matrix $A(x) = \big(a_{ij}(x)\big)$ gleichmäßig positiv definit ist, ist $a_{11}(x)$ positiv und gleichmäßig nach unten beschränkt. Ferner ist b_1 auf $\overline{\Omega}$ beschränkt. Also gibt es ein genügend großes $d > 0$, so dass $L(e^{dx_1}) < 0$ auf $\overline{\Omega}$ ist.

Aus der Voraussetzung $Lu \le 0$ folgt damit $Lv_\varepsilon < 0$ auf $\overline{\Omega}$. Nun nehme die Funktion v_ε ihr Maximum in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ an. Also gilt $\nabla v_\varepsilon(x_0) = 0$, und die Matrix $\big(\partial_i\partial_j v_\varepsilon(x_0)\big)$ ist negativ semidefinit. Dann folgt mit Bemerkung 4.12 (3) der Widerspruch

$$0 > Lv_\varepsilon(x_0) = \underbrace{-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0)\partial_i\partial_j\, v_\varepsilon(x_0)}_{\le 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i(x_0)\partial_i v_\varepsilon(x_0)}_{=0} \ge 0\,.$$

Analog beweist man die Aussage, falls $Lu \ge 0$ gilt.

Für den nun folgenden Beweis von (2) beachte man, dass die Aussage (1) auch in beliebigen offenen, beschränkten Mengen gilt.

(2) Sei $c \ge 0$, $Lu \le 0$, und sei $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$. Falls $\Omega^+ = \emptyset$, ist nichts zu zeigen. Anderenfalls gilt auf der offenen Menge $\Omega^+ \ne \emptyset$

$$(L - c)u_{|_{\Omega^+}} = L(u_{|_{\Omega^+}}) - cu_{|_{\Omega^+}} \le 0$$

gilt. Nach (1) nimmt $u_{|_{\Omega^+}}$ sein Maximum in einem Punkt $x_0 \in \partial\Omega^+$ an, d.h.,

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\Omega^+} u = \sup_{\partial\Omega^+} u = u(x_0) > 0\,.$$

Der Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega^+$ kann nicht in Ω liegen, da sonst $u(x_0) = 0$ folgen würde. Also gilt $x_0 \in \partial\Omega$ und $\sup_{\partial\Omega^+} u = \sup_{\partial\Omega} u^+$. Der Fall $Lu \geq 0$ wird analog bewiesen. ■

Korollar 4.14 *Sei L ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung mit $c \geq 0$ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

(1) (Eindeutigkeitssatz) *Das Randwertproblem*

$$Lu = f \quad \textit{in } \Omega, \qquad u = g \quad \textit{auf } \partial\Omega \tag{4.14}$$

besitzt für Daten $f \in C^0(\Omega)$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$ höchstens *eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

(2) (Vergleichssatz) *Für Funktionen $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gelte*

$$Lv \leq Lw \quad \textit{in } \Omega \qquad \textit{und} \qquad v \leq w \quad \textit{auf } \partial\Omega\,.$$

Dann gilt $v \leq w$ in Ω.

(3) (Einschließungssatz) *Für Daten $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ und Funktionen $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gelte*

$$Lv \leq f \leq Lw \quad \textit{in } \Omega, \quad v \leq g \leq w \quad \textit{auf } \partial\Omega\,.$$

Dann genügt die eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des Randwertproblems (4.14) *der Ungleichung*

$$v \leq u \leq w \quad \textit{in } \Omega\,.$$

Beweis Da (1) und (3) aus dem Vergleichssatz (2) folgen, wird nur (2) bewiesen. Nach Voraussetzung hat $u = v - w$ die Eigenschaften $Lu \leq 0$ in Ω und $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Aus (4.13) folgt also $\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ = 0$, d.h., $v \leq w$ in Ω. ■

Bemerkung 4.15 (1) Die *Existenz* einer Lösung des Randwertproblems (4.14) für einen allgemeinen elliptischen Operator L kann mit den hier zur Verfügung stehenden Methoden nicht bewiesen werden.

(2) Der Beweis von Satz 4.13 (2) benutzte die Voraussetzung $c \geq 0$. Auf diese Bedingung kann *nicht* verzichtet werden. Für $\lambda > 0$ betrachte man z.B. das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u - \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1), \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,;$$

es ist also $c = -\lambda < 0$. dann löst für $\lambda = \lambda_{k,\ell} = (k^2 + \ell^2)\pi^2$, $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$u(x_1, x_2) = \sin k\pi x_1 \cdot \sin \ell\pi x_2$$

obiges Dirichlet-Problem und genügt keinem Minimum- oder Maximumprinzip. In diesem Fall ist u Lösung des Eigenwertproblems

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0\,,$$

zum Eigenwert λ.

(3) Auch für Gleichungen höherer Ordnung wie z.B. der biharmonischen Gleichung

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

gibt es kein Maximum- oder Minimumprinzip: Die Funktion $u(x) = 1 - |x|^2$ ist *biharmonisch*, positiv in $B_1(0)$ und verschwindet auf $\partial B_1(0)$.

Beispiel 4.16 Der Einschließungssatz wird benutzt, um nicht explizit berechenbare Lösungen einzuschließen oder zu approximieren.

Man betrachte das Dirichlet-Problem $-\Delta u = 0$ im Sektor $\Omega = \{(x_1, x_2) \in B_1(0) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ mit den Randwerten $u(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$. Da für $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$

$$0 \leq u(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

gilt, folgt aus dem Einschließungssatz oder direkt mit Satz 4.8

$$0 \leq u(x_1, x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{in } \Omega\,.$$

Durch eine geschickte Auswahl von Vergleichsfunktionen läßt sich dieses Ergebnis erheblich verbessern. Die Funktionen $v(x_1, x_2) = a(x_1 + x_2) + b x_1 x_2$ sind für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ harmonisch. Da $\sqrt{2}\, x_1 x_2 \leq \sqrt{|x_1 x_2|}$ auf $\partial\Omega$ gilt, ist $\sqrt{2}\, x_1 x_2$ eine punktweise untere Schranke der gesuchten Lösung u. Ferner gilt $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ für alle $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Deshalb erfüllt die gesuchte Lösung die Ungleichung

$$\sqrt{2}\, x_1 x_2 \leq u(x_1, x_2) \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{in } \Omega\,.$$

Satz 4.17 (A priori-Abschätzung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung mit $c \geq 0$, es sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

(1) *Ist $Lu \leq f$, gilt*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + M \sup_{\Omega} f^+\,. \tag{4.15}$$

(2) *Im Fall $Lu \geq f$ gilt*

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- + M \inf f^-\,.$$

(3) *Schließlich genügt die Lösung u der Poisson-Gleichung $Lu = f$ der* a priori-Abschätzung

$$\|u\|_{\infty,\Omega} \leq \|u\|_{\infty,\partial\Omega} + M\|f\|_{\infty,\Omega}\,. \tag{4.16}$$

Die Konstante $M \geq 0$ hängt nur vom Durchmesser von Ω und von $\frac{1}{\alpha_0}\,\|b\|_{\infty,\Omega}$, s. Definition 4.11, ab.

Beweis

(1) Ohne Einschränkung gelte $0 < x_1 < \ell$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Mit den Größen $\alpha_0 > 0$ und $\|b\|_{\infty,\Omega}$ aus Definition 4.11 erhält man für genügend großes $d > 0$ die Abschätzung

$$\big(L - c(x)\big)e^{dx_1} = \big(-d^2 a_{11}(x) + d b_1(x)\big)e^{dx_1} \le \big(-\alpha_0 d^2 + d\|b\|_{\infty,\Omega}\big)e^{dx_1} \le -\alpha_0\,,$$

z.B. für $d = 1 + \frac{\|b\|_{\infty,\Omega}}{\alpha_0}$. Jetzt betrachte man die Vergleichsfunktion

$$w(x) = \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{1}{\alpha_0}\big(e^{dl} - e^{dx_1}\big)\sup_{\Omega} f^+ \ge 0\,.$$

Offensichtlich gilt $w \ge u$ auf $\partial\Omega$ sowie

$$\begin{aligned} L\,w(x) &\ge c(x)\sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{1}{\alpha_0}\Big(c(x)\big(e^{dl} - e^{dx_1}\big) - (L - c(x))\big(e^{dx_1}\big)\Big)\sup_{\Omega} f^+ \\ &\ge \sup_{\Omega} f^+ \ge f(x) \ge Lu(x)\,. \end{aligned}$$

Nach dem Vergleichssatz (Korollar 4.14 (2)) folgt $w \ge u$ in Ω, also (4.15) mit $M = \frac{1}{\alpha_0}\,e^{dl}$.

(2) Der Beweis von (2) verläuft analog mit Hilfe der Vergleichsfunktion

$$v(x) = \inf_{\partial\Omega} u^- + \frac{1}{\alpha_0}\,e^{dx_1}\,\inf_{\Omega}\,f^- \le 0,$$

welche $v \le u$ auf $\partial\Omega$ und $Lv \le f \le Lu$ in Ω erfüllt.

(3) folgt aus (1) und (2). ∎

Bemerkung 4.18 (1) Die a priori-Abschätzung (4.15) ist die direkte Verallgemeinerung von (4.13) auf den Fall $f^+ = \max(f, 0) \ne 0$. Nur Punkte $x \in \Omega$ mit $f(x) > 0$, in denen im Fall $L = -\Delta$ die Funktion u superharmonisch ist, müssen bei der Abschätzung von $\sup_\Omega u$ gesondert berücksichtigt werden.

(2) Sei u_h eine z.B. numerisch gewonnene Näherung des Dirichlet-Problems $Lu = f$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$ und gelte

$$L\,u_h = f_h \text{ in } \Omega, \quad u_h = g_h \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann impliziert (4.16) die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{\infty,\Omega} \le \|g - g_h\|_{\infty,\partial\Omega} + M\ \|f - f_h\|_{\infty,\Omega}.$$

Um die Eindeutigkeit der Lösung einer elliptischen Gleichung mit Neumann- oder Robin-Randbedingung zu beweisen, wird eine andere Version des starken Maximumprinzips benötigt.

Lemma 4.19 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch. Es sei $x_0 \in \partial\Omega$ ein Randpunkt mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *∇u ist stetig nach x_0 fortsetzbar,*

(ii) *$u(x_0) > u(x)$ für alle $x \in \Omega$,*

(iii) *$\partial\Omega$ genügt in $x_0 \in \partial\Omega$ der* inneren Kugelbedingung, *d.h., es gibt eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.*

Dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x_0) > 0$$

für die äußere Normalenableitung.

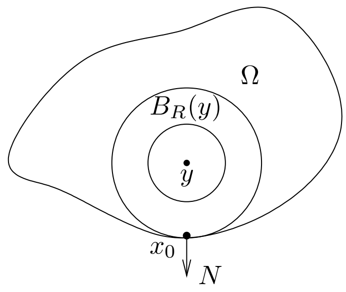

Abbildung 4.3: Die innere Kugelbedingung

Die gleiche Aussage gilt für einen elliptischen Operator L und eine Funktion u mit $Lu \leq 0$, falls die Bedingung

$$c(x)\, u(x_0) \geq 0 \quad \textit{für alle } x \in B_R(y)$$

erfüllt ist.

Beweis Wir benutzen eine subharmonische Hilfsfunktion h auf dem Kreisring $A = B_R(y) \backslash B_{R/2}(y)$ mit den Eigenschaften

$$h = 0 \text{ auf } \partial B_R(y), \quad h > 0 \text{ in } A, \quad \frac{\partial h}{\partial N}(x_0) < 0.$$

Konkret betrachtet man

$$h(x) = e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha R^2}, \quad \alpha > 0.$$

Offensichtlich verschwindet h auf $\partial B_R(y)$, mit $N = N(x_0) = \frac{x_0 - y}{|x_0 - y|}$ gilt

$$\frac{\partial h}{\partial N}(x_0) = -2\alpha N \cdot (x_0 - y) e^{-\alpha|x_0-y|^2} < 0\,,$$

und für $\alpha > 0$ genügend groß erhält man

$$\Delta h(x) = 2\alpha e^{-\alpha|x-y|^2}(2\alpha|x-y|^2 - n) > 0 \quad \text{in } A\,.$$

Mit der Hilfsfunktion h definiert man

$$v_\varepsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon h(x), \quad \varepsilon > 0\,.$$

Auf Grund der Voraussetzungen an u und h gibt es ein genügend kleines $\varepsilon > 0$, so dass

$$\begin{array}{rcl} v_\varepsilon & \leq & 0 \quad \text{auf } \partial A, \quad v_\varepsilon(x_0) = 0 \\ -\Delta v_\varepsilon & = & -\Delta u - \varepsilon \Delta h \leq 0 \quad \text{in } A \end{array}$$

gilt. Mit dem schwachen Maximumprinzip (4.10) folgt $v_\varepsilon \leq 0$ in A. Wegen $v_\varepsilon(x_0) = 0$ muss folglich $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial N}(x_0) \geq 0$ gelten, also

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial N}(x_0) > 0\,.$$

Der Beweis im Fall $Lu \leq 0$ wird vollkommen analog geführt. Wie zuvor gibt es ein genügend großes $\alpha > 0$, so dass $(L - c^-)h < 0$ gilt; dabei ist $c^- = \min(c, 0)$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} (L - c^-)v_\varepsilon(x) & = & Lu - c^-u - cu(x_0) + c^-u(x_0) + \varepsilon(L - c^-)h \\ & \leq & c^-(x)\big(u(x_0) - u(x)\big) - c(x)u(x_0) \\ & \leq & 0\,, \end{array}$$

so dass das schwache Maximumprinzip (4.13) mit $L - c^-$ an Stelle von L

$$\sup_A v_\varepsilon \leq \sup_{\partial A} v_\varepsilon^+ = 0$$

impliziert. Jetzt führt der erste Beweisteil wieder zur Aussage $\frac{\partial u}{\partial N}(x_0) > 0$. ■

Satz 4.20 (Starkes Maximum- und Minimumprinzip) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung.*

(1) *Sei $c = 0$ und $Lu \leq 0$ bzw. $Lu \geq 0$ in Ω. Nimmt u sein Maximum bzw. Minimum in einem Punkt $x_1 \in \Omega$ an, ist u konstant in Ω.*

(2) *Sei $c \geq 0$ und $Lu \leq 0$ bzw. $Lu \geq 0$ in Ω. Nimmt u ein nichtnegatives Maximum bzw. ein nichtpositives Minimum in Ω an, ist u konstant in Ω.*

Beweis Wir betrachten den Fall $c \geq 0$ und $Lu \leq 0$, in dem u sein Maximum $u(x_1) \geq 0$ in einem Punkt $x_1 \in \Omega$ annimmt. Angenommen, u ist nicht konstant in Ω. Dann ist $\Omega^- := \{x \in \Omega : u(x) < u(x_1)\}$ nichtleer und offen, und $\partial\Omega^- \cap \Omega \neq$

$\emptyset$. Man wähle einen Punkt $y \in \Omega^-$, der näher an $\partial\Omega^-$ als an $\partial\Omega$ liegt, und anschließend die größte Kugel $B_r(y)$ in Ω^-. Nach Konstruktion schneidet $\overline{B_r(y)}$ den Rand $\partial\Omega^-$ in einem Punkt x_0, in dem die Voraussetzungen von Lemma 4.19 erfüllt sind: $u(x_0) = u(x_1) > u(x)$ für alle $x \in B_r(y) \subset \Omega^-$, und in x_0 genügt Ω^- der inneren Kugelbedingung. Ferner gilt $c(x)u(x_0) \geq 0$ in Ω. Also gilt für einen in $\Omega\backslash\Omega^-$ hineinweisenden Normalenvektor N die Aussage $\partial u/\partial N(x_0) > 0$, welches zu einem Widerspruch zu $u = u(x_1)$ in $\Omega\backslash\Omega^-$ führt.

Die anderen Fälle werden analog bewiesen. ∎

Satz 4.21 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glattberandetes Gebiet, so dass in jedem Randpunkt die innere Kugelbedingung erfüllt ist und die Normalableitung ausgewertet werden kann. Ferner sei L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung und $c \geq 0$.*

(1) (Eindeutigkeitssatz) *Die Poisson-Gleichung*

$$L\,u = f \ \text{ in } \Omega \tag{4.17}$$

mit Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial N} = g \ \text{ auf } \partial\Omega \tag{4.18}$$

oder mit Robin-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha\,u = g \ \text{ auf } \partial\Omega \tag{4.19}$$

besitzt für Daten $f \in C^0(\Omega), g \in C^0(\partial\Omega)$ und $0 \leq \alpha \in C^0(\partial\Omega)$ höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, falls c oder α nicht identisch 0 ist. Gilt $c \equiv 0$ und $\alpha \equiv 0$, ist u nur bis auf Konstanten eindeutig bestimmt.

(2) (Vergleichssatz) *Für Funktionen $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gelte*

$$L\,v \leq L\,w \ \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \alpha\,v \leq \frac{\partial w}{\partial N} + \alpha\,w \ \text{ auf } \partial\Omega.$$

Falls c oder α nicht identisch 0 ist, gilt $v \leq w$ in Ω.

(3) (Einschließungssatz) *Es sei c oder α nicht identisch 0, und es gelte*

$$L\,v \leq f \leq L\,w \ \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \alpha\,v \leq g \leq \frac{\partial w}{\partial N} + \alpha\,w \ \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann genügt die eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ des Poisson-Problems $Lu = f$ mit Randbedingung (4.17) oder (4.19) der Ungleichung

$$v \leq u \leq w \ \text{ in } \Omega.$$

Beweis

(1) Sind u_1, u_2 Lösungen von (4.17), (4.18) bzw. (4.17), (4.19), genügt $u = u_1 - u_2$ den Gleichungen $Lu = 0$ und

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial N} + \alpha u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \tag{4.20}$$

Ist u nicht konstant, nimmt u (oder $-u$) nach Satz 4.20(2) sein Maximum $u(x_0) \geq 0$ in einem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ an, und es gilt $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in \Omega$. Nach Lemma 4.19 folgt $\partial u/\partial N(x_0) > 0$ ein Widerspruch zur Randbedingung (4.20). Also stimmt u in Ω mit einer Konstanten M überein. Ist $\alpha \not\equiv 0$, folgt aus (4.20) $0 = \alpha M$, also $M = 0$; im Fall $c \not\equiv 0$ folgt aus $0 = Lu = cM$ ebenfalls $M = 0$.

(2) Nach Voraussetzung gilt $L(v-w) \leq 0$ in Ω und $\left(\frac{\partial}{\partial N} + \alpha\right)(v-w) \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Falls $v \leq w$ nicht gilt, würde $v-w$ nach Satz 4.20(2) sein positives Maximum auf $\partial\Omega$ annehmen. Da die Möglichkeit $v - w = \text{const} > 0$ ausgeschlossen ist, liefert Lemma 4.19 wieder den Widerspruch $\partial(v-w)/\partial N > 0$ in einem Randpunkt.

(3) folgt sofort aus (2). Man beachte, dass die Existenz einer Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ hier nicht gezeigt werden wird. ■

In unbeschränkten Gebieten wie dem Halbraum $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$ oder dem Außenraum $\mathbb{R}^n \backslash B_R$ der Kugel $\overline{B}_R$ muss das Verhalten der Lösung u auch im Unendlichen vorgeschrieben werden, um Abschätzungen durch Maximumprinzipien oder Eindeutigkeit zu beweisen. Der Einfachheit halber soll nur das Dirichlet-Problem zu $-\Delta u = f$ untersucht werden. Eine Sonderrolle spielen zweidimensionale unbeschränkte Gebiete, da die Fundamentallösung $E(x) = -\frac{1}{2\pi} \log r$ für $r = |x| \to \infty$ unbeschränkt ist.

Satz 4.22 (Schwaches Maximum- und Minimumprinzip in unbeschränkten Gebieten)
Sei $\Omega \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}^n$ *ein unbeschränktes Gebiet und* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(1) *Ist* $n \geq 2$ *und* u *subharmonisch, gilt*

$$\sup_{\Omega} u = \max\{\sup_{\partial\Omega} u,\ \limsup_{|x|\to\infty} u(x)\}\,. \tag{4.21}$$

Falls u *superharmonisch ist, gilt*

$$\inf_{\Omega} u = \min\{\inf_{\partial\Omega} u,\ \liminf_{|x|\to\infty} u(x)\}\,.$$

(2) *Ist* $n = 2$ *und* u *nach oben beschränkt und subharmonisch bzw. nach unten beschränkt und superharmonisch, gilt*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \textit{bzw.} \quad \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\,. \tag{4.22}$$

Beweis

(1) Offensichtlich gilt

$$\sup_{\Omega} u \geq M := \max\{\sup_{\partial\Omega} u, \limsup_{|x|\to\infty} u\}.$$

Zum Beweis der Ungleichung $\sup_\Omega u \leq M$ braucht nur der Fall $M < \infty$ betrachtet werden. Nach Definition des limes superior gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon > 0$, so dass $|u(x)| < M + \varepsilon$ für alle $x \in \Omega$ mit $|x| \geq R_\varepsilon$ gilt. Aus $\partial(\Omega \cap B_R) \subset (\partial\Omega \cap \overline{B}_R) \cup (\overline{\Omega} \cap \partial B_R)$ folgt damit für jedes $R \geq R_\varepsilon$

$$\sup_{\partial(\Omega\cap B_R)} u \leq M + \varepsilon\,.$$

Dann liefert das schwache Maximumprinzip (4.10) in $\Omega\cap B_R$ die Abschätzung

$$\sup_{\Omega\cap B_R} u = \sup_{\partial(\Omega\cap B_R)} u \leq M + \varepsilon \quad \text{für } R \geq R_\varepsilon\,,$$

also $\sup_\Omega u \leq M + \varepsilon$ im Grenzfall $R \to \infty$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung für subharmonische Funktionen. Die Aussage für superharmonische Funktionen wird analog bewiesen.

(2) Nach (1) ist für eine beschränkte, subharmonische Funktion u nur noch $\limsup_{|x|\to\infty} u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$ zu zeigen. Zum Beweis wählen wir einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2\backslash\overline{\Omega}$ sowie eine Zahl $C > 0$ mit $C\,\mathrm{dist}(x_0, \Omega) \geq 1$ und betrachten die subharmonische Funktion

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon \log(C|x - x_0|)$$

auf Ω. Da u von oben beschränkt ist, gilt $\limsup_{|x|\to\infty} u_\varepsilon(x) = -\infty$, also nach (1) für jedes $x \in \Omega$

$$u_\varepsilon(x) \leq \sup_{\Omega} u_\varepsilon = \sup_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \sup_{\partial\Omega} u\,.$$

Für $\varepsilon \to 0+$ erhält man daraus die Abschätzung $u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$. Die Aussage für superharmonische Funktionen u wird analog mit der Hilfsfunktion $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon \log(C|x - x_0|)$ bewiesen. ■

Bemerkung 4.23 Das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega = \mathbb{R}^n\backslash\overline{B}_1, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial B_1, \qquad u \to 1 \quad \text{in } \infty \tag{4.23}$$

besitzt für $n \geq 3$ die Lösung $u(x) = 1 - r^{2-n}$. Diese Lösung ist nach Satz 4.22 (1) eindeutig. Im Fall $n = 2$ würde eine Lösung u jedoch

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u = 0 = \inf_{\partial\Omega} u = \inf_{\Omega} u\,,$$

also $u \equiv 0$ im Widerspruch zur Bedingung $u \to 1$ in ∞ erfüllen. Das Dirichlet-Problem (4.23) besitzt im zweidimensionalen Fall *keine* Lösung.

Satz 4.24 *Sei* $\Omega \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}^n$ *ein unbeschränktes Gebiet.*

(1) (Eindeutigkeitssatz) *Für beliebige Daten* $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ *und* $u_\infty \in \mathbb{R}$ *besitzt das Dirichlet-Problem*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in } \Omega, \qquad u = g \quad \textit{auf } \partial\Omega, \qquad u(x) \to u_\infty \quad \textit{für } |x| \to \infty$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. *Im Fall* $n = 2$ *darf die Voraussetzung für* $|x| \to \infty$ *durch die schwächere Annahme „u beschränkt“ ersetzt werden.*

(2) (Vergleichssatz) *Die Funktionen* $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *sollen den Ungleichungen*

$$-\Delta v \leq -\Delta w \quad \textit{in } \Omega, \qquad v \leq w \quad \textit{auf } \partial\Omega, \qquad \limsup_{|x|\to\infty} v(x) \leq \liminf_{|x|\to\infty} w(x)$$

genügen. Dann gilt $v \leq w$ *in* Ω. *Im Fall* $n = 2$ *darf die Voraussetzung für* $|x| \to \infty$ *durch „v nach oben beschränkt, w nach unten beschränkt “ ersetzt werden.*

Beweis

(1) Die Differenz zweier Lösungen u_1, u_2 zu den Daten f, g, u_∞ erfüllt nach Satz 4.22 (1) die Bedingung $\sup_\Omega(u_1 - u_2) = 0 = \inf_\Omega(u_1 - u_2)$. Also ist $u_1 = u_2$.

(2) Nach Voraussetzung ist $v - w$ subharmonisch. Ferner gilt $\sup_{\partial\Omega}(v - w) \leq 0$ und $\limsup_{|x|\to\infty}(v - w)(x) \leq 0$. Dann liefert Satz 4.22 (1) die Behauptung.

Die schwächere Voraussetzung im zweidimensionalen Fall wird mit Satz 4.22 (2) behandelt. ■

4.3 Greensche Funktionen und Poisson-Kerne

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Im *Dirichlet-Problem der Laplace-Gleichung* wird zu einer vorgegebenen Randfunktion $a : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= a \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Dabei bedeutet $u = a$ auf $\partial\Omega$, dass für jedes $x \in \partial\Omega$

$$a(x) = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega}} u(y) \tag{4.25}$$

gilt. In diesem Fall ist a in x stetig, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(x) - u(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in B_\delta(x) \cap \Omega$. Betrachtet man jetzt eine Folge $(y_k) \subset B_\delta(x) \cap \Omega$ mit $y_k \to x' \in B_\delta(x) \cap \partial\Omega$, folgt aus (4.25)

$$|a(x) - a(x')| \le \varepsilon \quad \text{für alle } \; x' \in B_\delta(x) \cap \partial\Omega.$$

Analog wird das *Neumann-Problem der Laplace-Gleichung* durch

$$-\Delta u = 0 \;\text{ in}\,\Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial N} = a \;\text{ auf }\; \partial\Omega \tag{4.26}$$

definiert.

Lemma 4.25 *In der Greenschen Formel* (4.2) *ersetze man die Fundamentallösung $E(x-y)$ durch*

$$G(x,y) = E(x-y) - g(x,y) \tag{4.27}$$

mit einer Funktion $g : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, die für festes $x \in \Omega$ bzgl. $y \in \Omega$ harmonisch ist und $g(x,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega})$ erfüllt. Dann gilt für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und jedes $x \in \Omega$ die Integraldarstellung

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)(-\Delta u)(y)dy + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial N} G(x,y) - u \frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y) \right) do_y. \tag{4.28}$$

Beweis Man wiederhole den Beweis von Satz 4.3, indem man mit dem Integral $\int G(x,y)(-\Delta u)(y)dy$ über $\Omega \backslash B_\varepsilon(x)$ startet. Da g keine Singularitäten in $\Omega \times \overline{\Omega}$ besitzt, entstehen keine neuen Terme oder Schwierigkeiten beim Grenzübergang $\varepsilon \to 0+$. ■

Zur Lösung des Dirichlet-Problems (4.24) versuche man, die Funktion g in Lemma 4.25 derart zu wählen, dass $G(x,y)$ für jedes $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$ verschwindet. D.h., für alle $x \in \Omega$ gelte

$$g(x,\cdot) = E(x-\cdot) \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \tag{4.29}$$

In diesem Fall heißt $G(x,y) = E(x-y) - g(x,y)$ die *Greensche Funktion* zu $-\Delta$ auf Ω. Offensichtlich hat G für jedes $x \in \Omega$ die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &G(x,\cdot) \text{ ist harmonisch in } \Omega\backslash\{x\} \\ &G(x,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega}\backslash\{x\}) \\ &G(x,\cdot) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ &G(x,y) \approx E(x-y) \text{ für } y \to x. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Satz 4.26 *Für das beschränkte, glattberandete Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gebe es eine Greensche Funktion $G(x,y)$. Dann gilt für jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ die Integraldarstellung*

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\, \frac{\partial}{\partial N_y}\, G(x,y)\, do_y\,. \tag{4.31}$$

Beweis Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$, folgt die Behauptung mit Lemma 4.25. Falls nur $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gilt, benutzt man (4.28) mit der gegebenen Greenschen Funktion G auf einer geeigneten Folge von Gebieten (Ω_k), die Ω von innen ausschöpfen, vgl. den Beweis von Korollar 4.4. Mit (4.30) folgt für jedes $x \in \Omega$ – unter Weglassen weiterer Details –, dass

$$\int_{\partial\Omega_k} \Big(\frac{\partial u}{\partial N} G(x,y) - u \frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y) \Big) \, do_y$$

für $k \to \infty$ gegen die rechte Seite von (4.31) konvergiert. ∎

Die Formel (4.31) liefert eine mögliche Lösung des Dirichlet-Problems (4.24), nämlich

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} a(y) \frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y) \, do_y \,.$$

Im Einzelfall muss jedoch gezeigt werden, dass u tatsächlich harmonisch ist und die Randwerte a im Sinne von (4.25) annimmt.

Beispiel 4.27 Sei $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) : \ x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \, x_n > 0\}$ der obere Halbraum. Obwohl Ω unbeschränkt ist, führt das zuvor beschriebene Verfahren zum Ziel. Für $x = (x', x_n) \in \Omega$ sei

$$x^* = (x', -x_n) \in \mathbb{R}^n_-$$

der am Halbraumrand $\partial\Omega = \big\{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\big\}$ gespiegelte Punkt, und sei

$$\begin{aligned} G(x,y) &= E(x-y) - E(x^* - y) \\ &= E(x-y) - E(x - y^*) \,. \end{aligned}$$

Da $E(x^* - y)$ keine Singularität für $x \in \Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ besitzt, erfüllt G die Bedingungen (4.30) und ist eine geeignete Greensche Funktion. Für $y = (y', 0) \in \partial\mathbb{R}^n_+$, $n \geq 2$, berechnet man mit dem Normalenvektor $N_y = -e_n = (0, \ldots, 0, -1)$ den sog. *Cauchy-Poisson-Kern*

$$K(x, y') := -\frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y) = +\frac{\partial}{\partial y_n} G(x,y) = \frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{|x-y|^n} \,,$$

also

$$K(x, y') = \frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{(|x' - y'|^2 + x_n^2)^{n/2}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \ y' \in \mathbb{R}^{n-1} \,. \tag{4.32}$$

Offensichtlich hat K für $y = (y', 0) \in \partial\mathbb{R}^n_+$ die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &K(x, y') \text{ ist harmonisch in } x \in \mathbb{R}^n_+ \,, \\ &K(x, y') \to 0 \quad \text{für } x \to x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+, \, x_0 \neq y \,, \\ &K(x, y') > 0 \quad \text{für } x > 0 \,, \\ &\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x, y') dy' = 1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n_+ \,. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Die erste Eigenschaft folgt aus der Harmonizität von G in x und aus der Definition $K = -\frac{\partial}{\partial N_y} G$. Zum Beweis der wichtigen Integralbedingung $(4.33)_4$ benutze man (4.28) für $u \equiv 1$ auf der oberen Halbkugel

$$B_R^+ = \{y = (y', y_n) \in B_R :\ y_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n_+$$

mit $x \in B_R^+$ und lasse R gegen unendlich laufen. Nach (4.28) ist

$$1 = \int_{|y'| \le R} K(x, y') dy' - \int_{\partial B_R^+ \cap \mathbb{R}^n_+} \frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y)\, do_y\,,$$

wobei für $y \in \partial B_R^+ \cap \mathbb{R}^n_+$ wegen $N_y = \frac{y}{|y|}$

$$\frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \Big(\frac{x - y}{|x - y|^n} - \frac{x^* - y}{|x^* - y|^n} \Big) \cdot \frac{y}{|y|}$$

gilt. Die Summanden mit $x|x - y|^{-n}$ bzw. $x^*|x^* - y|^{-n}$ sind für $y \in \partial B_R^+ \cap \mathbb{R}^n_+$ vom Typ $O(R^{-n})$. Ferner gilt

$$|x - y|^n = |y|^n \left| 1 - \frac{x}{|y|} \right|^n = |y|^n \big(1 + O(R^{-1})\big)\,,$$

und $|x^* - y|^n = |y|^n \big(1 + O(R^{-1})\big)$, so dass auch

$$\Big(\frac{y}{|x - y|^n} - \frac{y}{|x^* - y|^n} \Big) = y\, \frac{|x^* - y|^n - |x - y|^n}{|x - y|^n \cdot |x^* - y|^n}$$

vom Typ $O(R^{-n})$ ist. Da das Oberflächenmaß von $\partial B_R^+ \cap \mathbb{R}^n_+$ nur wie $O(R^{n-1})$ anwächst, folgt für $R \to \infty$ die Integralbedingung $(4.33)_4$.

Satz 4.28 *Für jede beschränkte, stetige Funktion $a \in BC^0(\mathbb{R}^{n-1})$ ist*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a(y')\, K(x, y')\, dy' \tag{4.34}$$

eine harmonische Funktion in $BC^0(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, die die Randwerte a auf $\partial \mathbb{R}^n_+$ annimmt.

Beweis An der Darstellung des Cauchy-Poisson-Kerns (4.32) liest man das Abklingverhalten

$$|K(x, y')| \le \frac{c(x_n)}{(x_n^2 + |y'|^2)^{n/2}} \le \frac{c(x_n)}{|y'|^n}$$

mit einer von x_n abhängigen Konstanten $c(x_n)$ für $|y'| \to \infty$ ab. Da sich das Abklingverhalten bzgl. $|y'| \to \infty$ für partielle Ableitungen nach x nicht verschlechtert, zeigt man mit Hilfe von Differenzenquotienten die Differenzierbarkeit von u nach x.. Insbesondere dürfen partielle Ableitungen für $u(x)$ unter dem Integralzeichen auf $K(x, y')$ angewandt werden. Da K bzgl. x harmonisch ist, gilt

$\Delta u = 0$. Aus $(4.33)_{3,4}$ folgt die Abschätzung $|u(x)| \le \|a\|_\infty$, so dass u auf der oberen Halbebene beschränkt ist.

Der Beweis, dass $u(x) \to a(x_0')$ für $x \in \mathbb{R}^n_+$, $x \to (x_0', 0) \in \partial\mathbb{R}^n_+$, konvergiert, benutzt die sich aus $(4.33)_4$ ergebende Darstellung

$$u(x) - a(x_0') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x,y') \big(a(y') - a(x_0')\big)\, dy' \,,$$

die Stetigkeit von a und $(4.33)_{1-3}$. Da in Satz 4.31 ein analoger Beweis für die Kugel $\Omega = B_R(0)$ geführt werden wird, soll an dieser Stelle auf weitere Beweisdetails verzichtet werden. ■

Bemerkung 4.29 Die Lösung u aus (4.34) des Dirichlet-Problems (4.24) ist *nicht* eindeutig, denn neben u ist $u(x)+\alpha x_n$ für jedes $\alpha \neq 0$ eine Lösung von (4.24) zum Randwert a. Dagegen kann man mit einem Approximationsargument wie im Beweis der Integralbedingung $(4.33)_4$ zeigen, dass (4.24) nur eine beschränkte Lösung besitzt.

Beispiel 4.30 Sei $\Omega = B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Analog zum Fall $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ wird die Greensche Funktion aus der Fundamentallösung durch eine Spiegelung von Punkten $x \in \Omega$ an $\partial\Omega$ gewonnen. Zu $x \in B_R$ bezeichne

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2}\, x \in \overline{B_R}^c$$

den Punkt auf dem durch 0 gehenden Strahl mit der Normbedingung $\frac{|x^*|}{R} = \frac{R}{|x|}$. Dann sei

$$G(x,y) := E(x-y) - E\Big(\frac{|x|}{R}\,(x^* - y)\Big) . \tag{4.35}$$

Offensichtlich ist $g(x,y) = E\big(\frac{|x|}{R}\,(x^*-y)\big)$ harmonisch in $y \in B_R$. Auf Grund der Gleichung

$$\Big(\frac{|x|}{R}\,|x^* - y|\Big)^2 = R^2 - 2x\cdot y + \frac{|x|^2|y|^2}{R^2} = \Big(\frac{|y|}{R}\,|y^* - x|\Big)^2$$

und $E(x-y) = {}''E(|x-y|)''$ gilt aber

$$G(x,y) = G(y,x) \,,$$

so dass G auch bzgl. $x \in B_R\backslash\{y\}$ harmonisch ist. Schließlich verschwindet G für $y \in \partial B_R$, denn $y^* = y$ für $|y| = R$. Die in Anbetracht von Satz 4.26 zu berechnende Normalableitung in G für $|y| = R$ liefert den *Poisson-Kern*

$$K(x,y) = -\frac{\partial}{\partial N_y}\, G(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n\, R|x-y|^n} \,. \tag{4.36}$$

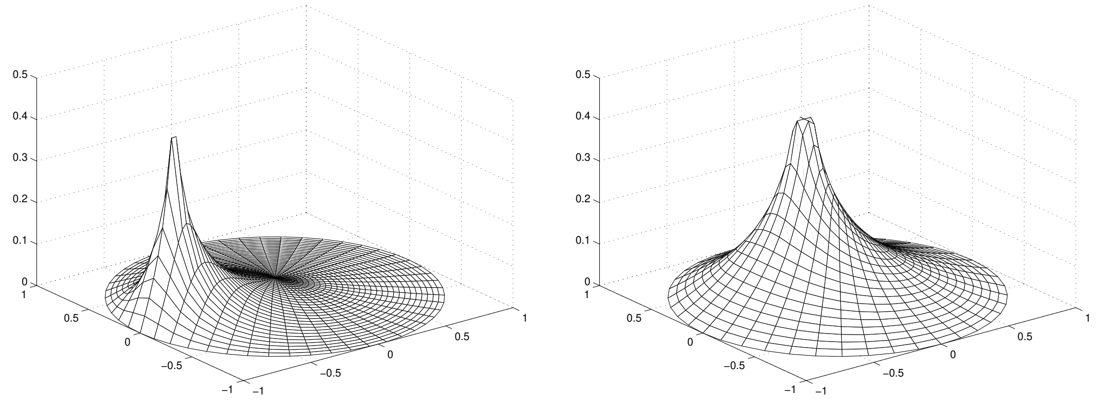

Abbildung 6.4: Die Greensche Funktion $G(x,y)$ in $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ für $y = \binom{-3/4}{0}$ und für $y = \binom{-1/4}{0}$ (auf geeigneter Höhe abgeschnitten)

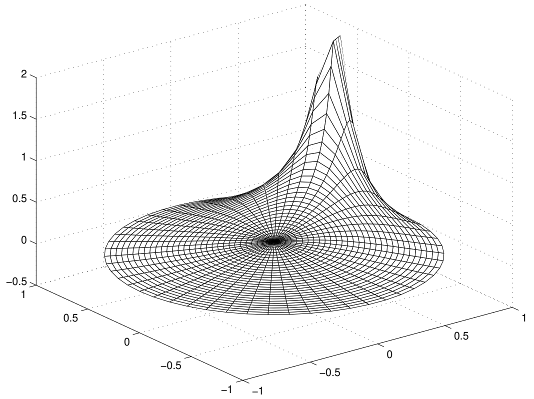

Abbildung 4.5: Der Poisson-Kern für $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ (auf der Höhe 2 abgeschnitten)

Satz 4.31 (1) *Für jede harmonische Funktion $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ gilt die* Poissonsche Integralformel

$$u(x) = \int_{\partial B_R} K(x,y)\, u(y)\, do_y \tag{4.37}$$

mit dem Poisson-Kern K aus (4.36).

(2) *Für jede Randfunktion $a \in C^0(\partial B_R)$ ist*

$$u(x) = \int_{\partial B_R} K(x,y)\, a(y)\, do_y$$

die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems (4.24).

Beweis

(1) Für $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$ folgt die Behauptung sofort mit Satz 4.26. Ist dagegen $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ harmonisch, betrachte man für $\lambda > 1$ die skalierte Funktion

$$u_\lambda(x) = u\big(\frac{x}{\lambda}\big) \in C^2(\overline{B_R})\,,$$

die ebenfalls harmonisch ist. Dann gilt mit Satz 4.26 und mit (4.36) für $x \in B_R$

$$u\big(\frac{x}{\lambda}\big) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u\big(\frac{y}{\lambda}\big)}{|x-y|^n}\, do_y\,.$$

Da $u \in C^0(\overline{B_R})$ ist, folgt für $\lambda \to 1+$ die Aussage (4.37).

(2) Da $K(x,y)$ für $y \in \partial B_R$ keine Singularität bzgl. x in Ω hat, folgt sofort die Differenzierbarkeit von $u(x)$ und insbesondere die Harmonizität von u in Ω. Es bleibt also für jeden Randpunkt $x_0 \in \partial B_R$ die Konvergenz

$$u(x) \to a(x_0) \quad \text{für } x \in B_R,\ x \to x_0$$

zu zeigen. Da $K > 0$ und nach (4.37) mit $u \equiv 1$

$$\int_{\partial B_R} K(x,y)\, do_y = 1 \tag{4.38}$$

gilt, schätzen wir für ein geeignetes $\delta > 0$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |u(x) - a(x_0)| &= \Big| \int_{\partial B_R} K(x,y)\,\big(a(y) - a(x_0)\big)\, do_y \Big| \\ &\le \Big(\int_{\substack{y \in \partial B_R \\ |y-x_0|<\delta}} + \int_{\substack{y \in \partial B_R \\ |y-x_0|\ge\delta}} \Big) K(x,y)\, |a(y) - a(x_0)|\, do_y\,. \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählt man auf Grund der Stetigkeit von a ein $\delta > 0$ mit

$$|a(y) - a(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } y \in \partial B_R,\ |y - x_0| < \delta\,.$$

Damit wird das erste Integral auf der rechten Seite wegen $K > 0$ und (4.38) durch $\frac{\varepsilon}{2}$ abgeschätzt. Für das zweite Integral über $\partial B_R \backslash B_\delta(x_0)$ benutze man für $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ die Abschätzung

$$\int_{\substack{y \in \partial B_R \\ |y-x_0|\ge\delta}} \frac{1}{|x-y|^n}\, do_y \le \int_{\substack{y \in \partial B_R \\ |y-x_0|\ge\delta}} \frac{1}{(\delta/2)^n}\, do_y \le \frac{\omega_n R^{n-1}}{(\delta/2)^n}\,,$$

woraus man

$$\int_{\substack{y \in \partial B_R \\ |y-x_0|>\delta}} K(x,y)\, |a(y) - a(x_0)|\, do_y \le 2\|a\|_\infty\, \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R}\, \frac{\omega_n R^{n-1}}{(\delta/2)^n}$$

ableitet. An dieser Stelle wählt man $|x - x_0|$ ($< \frac{\delta}{2}$) und damit $R^2 - |x|^2$ zusätzlich so klein, dass die rechte Seite kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird. Zusammenfassend erhält man ein $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$, so dass $|u(x) - a(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in B_R$ mit $|x - x_0| < \delta'$ folgt. ∎

Korollar 4.32 *Für die zweidimensionale Kreisscheibe B_1 und für jede stetige 2π-periodische Funktion $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (mit $x = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$)*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi) + 1}\, a(\varphi)\, d\varphi$$

die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems (4.34) *mit Randwerten $a(\varphi)$ in $x = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $0 \le \varphi < 2\pi$.*

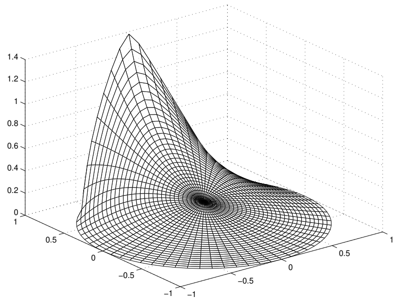

Abbildung 4.6: Lösung des Dirichlet-Problems in B_1 mit den Randdaten $a(\varphi) = \max(0, \frac{\pi}{2} - |\pi - 2\varphi|)$

Mit der Methode von O. Perron (1923) läßt sich das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = a \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{4.39}$$

für beliebige beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und für Randdaten $a \in C^0(\partial\Omega)$ (eindeutig) lösen, falls $\partial\Omega$ geeignete Bedingungen erfüllt.

Satz 4.33 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, ein beschränktes Gebiet und $a \in C^0(\partial\Omega)$.*

(1) *Das Dirichlet-Problem* (4.39) *besitzt genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, falls $\partial\Omega$ die folgende Regularitätsbedingung erfüllt:*

Fall $n \ge 3$ *In jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ genügt Ω der* äußeren Kugelbedingung, *d.h., es gibt eine Kugel $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ mit $x \in \partial B_r(y)$.*

Diese Bedingung ist erfüllt, falls sich $\partial\Omega$ lokal – nach einer geeigneten orthogonalen Koordinatentransformation – als Graph einer C^2-Funktion schreiben läßt.

Fall $n = 2$ *Zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ gibt es eine doppelpunktfreie (stetige) Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \backslash \Omega$ mit Anfangspunkt x. Mit anderen Worten: keine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ besteht aus einem isolierten Punkt.*

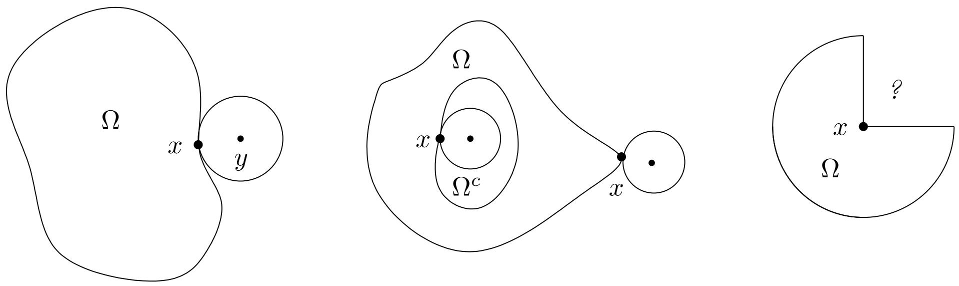

Abbildung 4.7: Zur äußeren Kugelbedingung

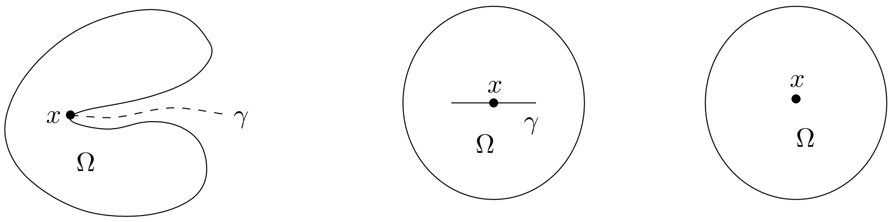

Abbildung 4.8: Zur Regularität im Fall $n = 2$

(2) *Der Rand „$\partial\Omega$ sei von der Klasse C^3", d.h., $\partial\Omega$ läßt sich lokal – nach einer geeigneten orthogonalen Koordinatentransformation – als Graph einer C^3-Funktion schreiben. Ferner gelte $a \in C^3(\partial\Omega)$. Dann gilt $u \in C^2(\overline{\Omega})$, und es gibt eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, so dass*

$$\|u\|_{C^2(\overline{\Omega}} \leq C\|a\|_{C^2(\partial\Omega)}$$

erfüllt ist.

Beweis Zum Beweis, der über die in §§4.1 – 4.2 bewiesenen Eigenschaften für (sub-)harmonische Funktionen weit hinausgeht, sei auf die Monographien

D. Gilberg, N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag 1977, 1983

J. Jost: Partielle Differentialgleichungen, Springer Verlag 1998

verwiesen. ■

Bemerkung 4.34 (1) Die im Fall $n = 2$ geforderte Randregularität ist minimal; der Beweis benutzt funktionentheoretische Methoden, die nur für $n = 2$ zur Verfügung stehen.

(2) Das Dirichlet-Problem (4.39) besitzt für die punktierte Kreisscheibe $\Omega = B_1 \backslash \{0\}$ mit den Randdaten $u = 0$ auf ∂B_1 und $u = 1$ in $x = 0$ *keine* Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$; zum Beweis wende man das schwache Maximumprinzip auf $u(x) + \varepsilon \log |x|$, $\varepsilon \geq 0$, in $B_1 \backslash B_r$, $0 < r \ll 1$, an.

(3) Die Regularitätsaussage von Satz 4.33 (2) gilt bereits, falls „$\partial\Omega$ von der Klasse $C^{2,\alpha}$", $0 < \alpha < 1$, ist und $a \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ gilt. In diesem Fall genügt u

der *a priori*-Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C\|a\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}\,.$$

(4) Satz 4.33 läßt sich mit Hilfe von §4.1 auf die Lösung des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω, $u = a$ auf $\partial\Omega$ für Daten $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, und $a \in C^0(\partial\Omega)$ bzw. $a \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ verallgemeinern.

Mit Satz 4.33 beweist man die Existenz der Greenschen Funktion $G(x, y)$ zum Dirichlet-Problem in beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und analysiert anschließend ihre Eigenschaften, ohne G genau zu kennen.

Satz 4.35 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches die Regularitätsanforderungen an $\partial\Omega$ nach Satz 4.33 (1) erfüllt.*

(1) *Es gibt genau eine Greensche Funktion $G(\cdot,\cdot)$ zum Dirichlet-Problem von $-\Delta$ auf Ω. Für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ gilt*

$$\begin{array}{lll} 0 < G(x,y) < E(x,y) & , & n \ge 3 \\ 0 < G(x,y) & , & n = 2 \end{array} . \tag{4.40}$$

(2) *Sei $\partial\Omega$ von der Klasse C^3 (oder $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$). Dann ist G symmetrisch, d.h.*

$$G(x,y) = G(y,x) \quad \textit{für alle} \quad x, y \in \Omega, \quad x \neq y\,. \tag{4.41}$$

Ferner gilt für alle $x, y \in \Omega$

$$G(\cdot, y) \in C^2(\overline{\Omega}\backslash\{y\}), \quad G(x,\cdot) \in C^2(\overline{\Omega}\backslash\{x\})$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial N_x} G(x,y) < 0 \quad \textit{für } x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega\,. \tag{4.42}$$

Beweis

(1) Nach Satz 4.33 (1) gibt es für jedes feste $x \in \Omega$ eine eindeutig bestimmte Funktion $g(x,\cdot)$ mit den Eigenschaften

$$-\Delta_y g(x,y) = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad g(x,y) = E(x-y) \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Dann ist $G(x,y) = E(x-y) - g(x,y)$ die eindeutig bestimmte Greensche Funktion.

Im Fall $n \ge 3$ ist $\inf_{y\in\partial\Omega} E(x-y) > 0$, so dass nach dem schwachen Minimumprinzip $g(x,y) > 0$ für alle $y \in \Omega$ folgt. Also ist $G(x,y) < E(x-y)$.

Nun sei $n \ge 2$ und $x \in \Omega$ fest gewählt. Da $g(x,\cdot) \in C^0(\overline{\Omega})$ und $E(x-y) \to +\infty$ für $y \to x$, gilt für alle $r > 0$ genügend klein:

$$G(x,y) = E(x-y) - g(x,y) > 0 \quad \text{für } y \in \partial B_r(x) \subset \Omega\,.$$

Da außerdem $G(x,\cdot)$ harmonisch in $\Omega\backslash\overline{B_r(x)}$ und $G(x,\cdot)=0$ auf $\partial\Omega$ ist, folgt mit dem schwachen Minimumprinzip

$$G(x,\cdot)>0 \quad \text{in } \Omega\backslash\overline{B_r(x)}\,.$$

Im Grenzfall $r\to 0+$ erhält man die Behauptung $G(x,y)>0$ für alle $y\in\Omega$, $y\neq x$.

(2) Nach der Regularitätsaussage Satz 4.33 (2) gilt $g(x,\cdot)\in C^2(\overline{\Omega})$, also auch $G(x,\cdot)\in C^2(\overline{\Omega}\backslash\{x\})$ für alle $x\in\Omega$. Zum Beweis der Symmetrie schneide man disjunkte Kugeln $B_\varepsilon=B_\varepsilon(x)$ und $B'_\varepsilon=B_\varepsilon(y)$ aus Ω aus und benutze die Greensche Formel auf $\Omega'=\Omega\backslash B_\varepsilon\backslash B'_\varepsilon$. Für $\varepsilon>0$ genügend klein gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega'}\big(G(x,z)\cdot\Delta G(y,z)-\Delta G(x,z)\cdot G(y,z)\big)\,dz \\ &= \Big(\int_{\partial\Omega}+\int_{\partial B_\varepsilon}+\int_{\partial B'_\varepsilon}\Big)\Big(G(x,z)\cdot\frac{\partial}{\partial N_z}G(y,z)-\frac{\partial}{\partial N_z}G(x,z)\cdot G(y,z)\Big)\,do_z\,. \end{aligned} \tag{4.43}$$

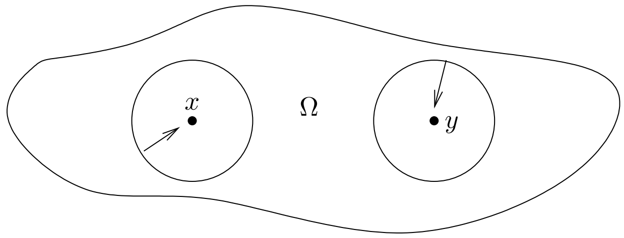

Abbildung 4.9: Zur Anwendung der Greenschen Formel

Auf Grund der Randbedingung an G auf $\partial\Omega$ verschwindet das Integral über $\partial\Omega$. Auf $\partial B_\varepsilon(x)$ gilt $G(x,z)=O(\varepsilon^{2-n})$, $n\geq 3$, bzw. $G(x,z)=O(|\log\varepsilon|)$, $n\geq 2$, während $\frac{\partial}{\partial N_z}G(y,z)$ für $\varepsilon\to 0+$ beschränkt bleibt. Daraus folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)}G(x,z)\cdot\frac{\partial}{\partial N_z}G(y,z)\,do_z\to 0 \quad \text{für } \varepsilon\to 0+\ .$$

Ebenso konvergiert $\int_{\partial B_\varepsilon(y)}\frac{\partial}{\partial N_z}G(x,z)\cdot G(y,z)\,do_z$ für $\varepsilon\to 0+$ gegen 0. Entscheidend ist das Verhalten

$$\frac{\partial}{\partial N_z}G(x,z)=\frac{\partial}{\partial N_z}E(x-z)+O(1)=\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}+O(1)$$

für $z\in\partial B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon\to 0+$, welches wegen der Stetigkeit von $G(y,z)$ in $z=x$ die Konvergenz

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\frac{\partial}{\partial N_z}G(x,z)\cdot G(y,z)\,do_z\to G(y,x)$$

für $\varepsilon \to 0+$ liefert. Analog beweist man, dass das verbleibende Randintegral über $\partial B_\varepsilon(y)$ für $\varepsilon \to 0+$ gegen $G(x, y)$ konvergiert. Zusammenfassend erhält man aus (4.43) für $\varepsilon \to 0+$ die Aussage

$$0 = -G(y, x) + G(x, y)\,,$$

also die Symmetrie.

Da $G(x, y)$ für festes $x \in \Omega$ zweimal stetig partiell differenzierbar bzgl. $y \in \Omega \backslash \{x\}$ ist, liefert die Symmetrie, dass G auch bzgl. x von der Klasse C^2 ist. Insbesondere gilt für festes $y \in \Omega$

$$G(x, y) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega, \qquad G(x, y) > 0 \quad \text{für } x \in \Omega\backslash\{y\}\,.$$

Dann beweist Lemma 4.19 angewandt auf $G(\cdot, y)$ in $\Omega\backslash\overline{B_\varepsilon(y)}$ die Aussage $\partial G(x, y)/\partial N_x < 0$ für $x \in \partial\Omega$. ∎

Korollar 4.36 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand von der Klasse C^3 (oder $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$), sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $a \in C^0(\partial\Omega)$ und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ die Lösung des Dirichlet-Problems*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in } \Omega, \qquad u = a \quad \textit{auf } \partial\Omega\,.$$

Dann gilt für $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y)\, f(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} a(y)\, \frac{\partial}{\partial N_y}\, G(x, y) do_y\,.$$