2 Die eindimensionale Wellengleichung

2.1 Das homogene Problem

Wir betrachten die homogene Wellengleichung ($c \in \mathbb{R}_+^*$)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{2.1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x)\,. \tag{2.2}$$

Analog zur Behandlung der Transportgleichung in Beispiel 1.1 werden neue Koordinaten eingeführt, um zu einer direkt lösbaren Gleichung zu kommen. Es sei

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

und

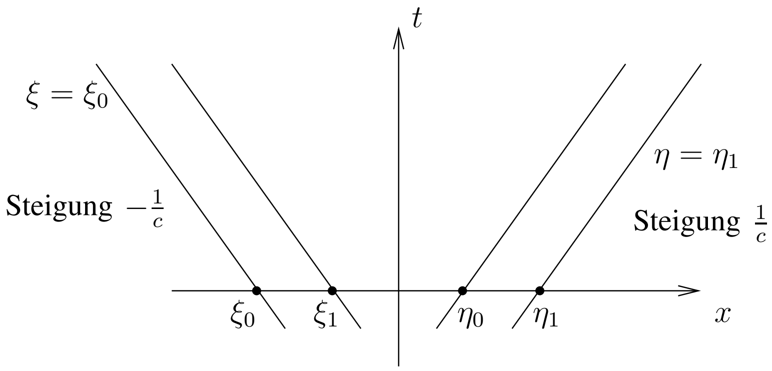

Abbildung 2.1: Geraden $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$.

$$v(\xi,\eta) = u(t,x)\,,$$

so dass $\partial_t u + c\partial_x u = 2cv_\xi$ und $\partial_t u - c\partial_x u = -2cv_\eta$ folgen. Dann impliziert (2.1)

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = -4c^2 v_{\xi\eta}\,, \tag{2.3}$$

also

$$v_{\xi\eta} = 0\,. \tag{2.4}$$

Folglich ist v_ξ von η unabhängig, und es gibt eine Funktion $f(\xi)$ mit $v_\xi(\xi,\eta) = f(\xi)$. Integration bzgl. ξ liefert

$$v(\xi,\eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} f(s)ds + G(\eta) =: F(\xi) + G(\eta)$$

als allgemeine Lösung von (2.4). Zusammenfassend erhält man mit noch unbekannten Funktionen F und G die Darstellung

$$\boxed{u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)} \tag{2.5}$$

als allgemeine Lösung von (2.1).

Der Anteil $G(x-ct)$ in (2.5) definiert eine mit der Geschwindigkeit $c > 0$ *nach rechts* laufende Welle, $F(x-ct)$ dagegen eine nach links laufende Welle. In beiden Fällen bleibt die Gestalt der Wellen erhalten. Damit u die Anfangsbedingungen

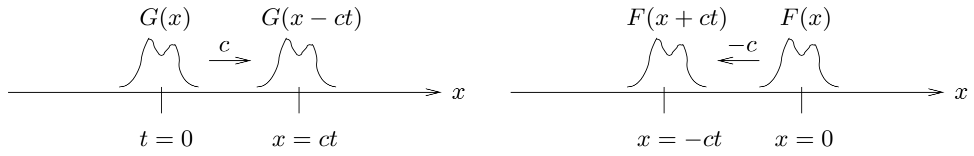

Abbildung 2.2: Nach rechts und links laufende Wellen

(2.2) erfüllt, muss

$$\begin{aligned} u_0 &= u(0,\cdot) = F + G \quad \Rightarrow u_0' = F' + G' \\ u_1 &= u_t(0,\cdot) = cF' - cG' \end{aligned}$$

gelten. Daraus ergibt sich eindeutig

$$F' = \frac{1}{2c}(cu_0' + u_1), \quad G' = \frac{1}{2c}(cu_0' - u_1)\,,$$

also mit Integrationskonstanten $F_0, G_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(s)ds + F_0\,, \\ G(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(s)ds + G_0\,. \end{aligned}$$

Wegen $F + G = u_0$ ist automatisch $F_0 + G_0 = 0$. Somit können die Integrationskonstanten F_0, G_0 in (2.5) weggelassen werden, und (2.5) nimmt die Form

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2}\big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds} \tag{2.6}$$

an. Eine Probe zeigt, dass (2.6) für $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ tatsächlich eine Lösung von (2.1) – (2.2) liefert.

Satz 2.1 *Für beliebige Anfangswerte* $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ *besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(0,\cdot) &= u_0 \\ u_t(0,\cdot) &= u_1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$*; diese Lösung ist durch* (2.6) *gegeben.*

Beweis Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus dem Verfahren, nach dem zuvor die Lösung gewonnen wurde. ■

Bemerkung 2.2 (1) Sei $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein beliebiger Raum-Zeit-Punkt mit $t \neq 0$. Dann hängt die Lösung $u(t,x)$ nur von den Anfangswerten $u_0(y)$, $u_1(y)$ mit

$$y \in A(t,x) = [x - c|t|,\ x + c|t|]$$

ab. Das Intervall $A(t,x)$ heißt das *Abhängigkeitsgebiet* der Lösung u in (t,x).

(2) Sei $\xi \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Raumpunkt. Dann beeinflussen die Anfangswerte $u_0(\xi)$, $u_1(\xi)$ das Verhalten des Lösung u nur in dem nach oben und unten offenen Doppelkegel

$$E(\xi) = \{(t,x) : \xi - c|t| \leq x \leq \xi + c|t|\},$$

dem sog. *Einflussgebiet.* Ist $u_1 \equiv 0$, so zeigt (2.6), dass

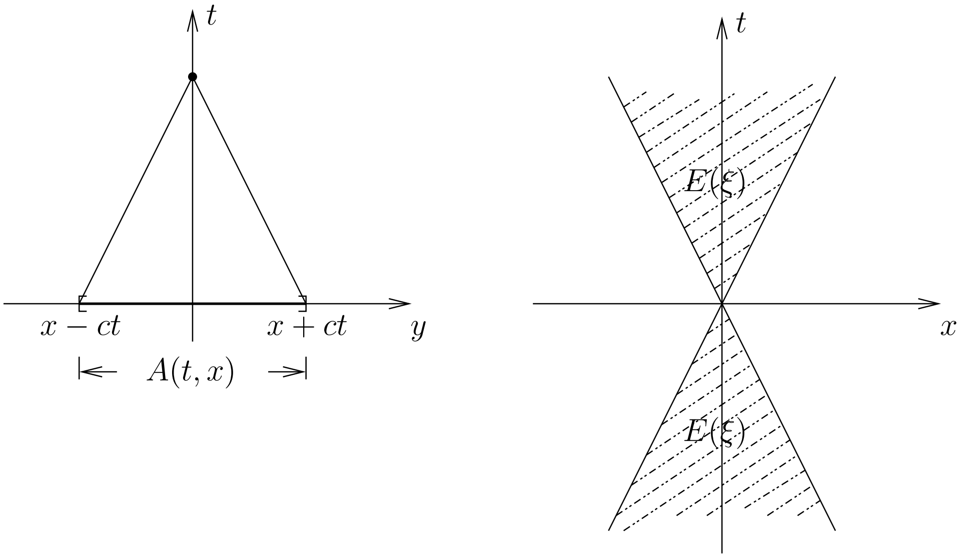

Abbildung 2.3: Abhängigkeits- und Einflussgebiet

$$\partial E(\xi) = \{(t,x) :\ \xi = x \pm c|t|\}$$

als Einflussgebiet genommen werden darf. Das Anfangssignal $u_0(\xi) \neq 0$ wird nur entlang den Charakteristiken $\xi = x \pm c|t|$, vgl. Abbildung 2.1 nach links und rechts transportiert. Im Fall $u_1 \neq 0$ ist i.a. der volle Kegel $E(\xi)$ das Einflussgebiet.

(3) Jetzt seien $x \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann liegt der Raum-Zeit-Punkt (t,x) für alle t mit

$$|t| > t_0 := \frac{|x - \xi|}{c}$$

im Einflussgebiet $E(\xi)$, d.h., das durch die Anfangswerte $u_0(\xi)$, $u_1(\xi)$ erzeugte Signal wird empfangen. Dieses Signal setzt in $t = \pm t_0$ scharf ein und wird im Fall $u_1 \equiv 0$ für $|t| > t_0$ nicht mehr wahrgenommen. Falls $u_1 \not\equiv 0$, wird u.U. für *alle* $|t| > t_0$ das Anfangssignal vernommen; ist $\int_{-\infty}^{\infty} u_1(s)ds \neq 0$, klingt das aufgenommene Signal für $|t| \to \infty$ nicht ab!

(4) Die Lösung (2.6) gestattet die einfachen punktweisen Abschätzungen

$$|u(t,x)| \leq \|u_0\|_\infty + |t|\,\|u_1\|_\infty$$

und

$$|u(t,x)| \leq \|u_0\|_\infty + \frac{1}{2c}\|u_1\|_1$$

unter Zuhilfenahme der sog. L^1-Norm $\|u_1\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |u_1(s)|\,ds$. Zur Untersuchung der Wohlgestelltheit der Wellengleichung betrachten wir (2.7) nur auf einem endlichen Zeitintervall $[0,T]$. Ferner benutzen wir die Funktionenräume $BC^2(\mathbb{R})$ für u_0 und $BC^1(\mathbb{R})$ für u_1 mit den Normen

$$\|u_0\|_{BC^2} = \max(\,\|u_0\|_\infty,\ \|u_0'\|_\infty,\ \|u_0''\|_\infty)$$

etc. sowie den Raum $BC^2([0,T]\times\mathbb{R})$ für die Lösung u. Offensichtlich gestattet (2.6) die einfache Abschätzung

$$\|u\|_{BC^2([0,T]\times\mathbb{R})} \leq K_T(\,\|u_0\|_{BC^2} + \|u_1\|_{BC^1})$$

mit einer von T abhängenden, jedoch von u_0, u_1 unabhängigen Konstanten $K_T > 0$. Die homogene Wellengleichung, d.h. mit $f = 0$, ist also auf endlichen Zeitintervallen bei den hier benutzten Normen wohlgestellt.

2.2 Das Anfangsrandwertproblem der Wellengleichung

Das *Anfangsrandwertproblem*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}\times(0,\ell) \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{in } (0,\ell) \\ u_t(0,x) &= u_1(x) && \text{in } (0,\ell) \\ u(t,0) = u(t,\ell) &= 0 && \text{für } t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.8}$$

auf dem Intervall $(0,\ell)$ kann durch geschickte Fortsetzung der Anfangswerte $u_0 \in C^2([0,\ell])$, $u_1 \in C^1([0,\ell])$ auf $\mathbb{R}$ auf den Fall (2.7) zurückgeführt werden. Die Identität (2.6) liefert nur für (t,x) mit $x \pm ct \in (0,\ell)$ eine Lösung der Wellengleichung, d.h. für positive t nur im Dreiecksgebiet

$$t \leq \frac{x}{c} \quad \text{und} \quad t \leq \frac{\ell - x}{c}, \quad x \in (0,\ell)\,,$$

s. Abbildung 2.4. Falls (2.6) z.B. in $x = 0$ für $t > 0$ gültig bleiben soll, muss auf Grund der Randbedingung $(2.8)_4$

$$\begin{aligned} 0 &= u(t,0) = \frac{1}{2}\big(u_0(ct) + u_0(-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{+ct} u_1\,ds \\ 0 &= u_t(t,0) = \frac{c}{2}\,\big(u_0'(ct) - u_0'(-ct)\big) + \frac{1}{2}\big(u_1(ct) + u_1(-ct)\big) \end{aligned}$$

gelten. Diese Bedingungen können für $|t| < \frac{\ell}{c}$ erfüllt werden, wenn u_0 und u_1 ungerade von $(0,\ell)$ auf $(-\ell,0)$ fortgesetzt werden. Die analoge Aussage trifft in $x = \ell$ zu, wenn u_0 und u_1 ungerade von $(0,\ell)$ auf $(\ell,2\ell)$ fortgesetzt werden.

Insgesamt werden die auf $(-\ell,\ell)$ ungeraden Funktionen u_0 und u_1 2ℓ-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt und anschließend in der Darstellung (2.6) zur Lösung des Anfangsrandwertproblems (2.8) benutzt. Sind die sich aus $(2.8)_2$ – $(2.8)_4$ ergebenden *Kompatibilitätsbedingungen*

$$u_0(0) = u_0(\ell) = 0, \quad u_1(0) = u_1(\ell) = 0$$

erfüllt, sind die oben konstruierten Fortsetzungen von u_0 und u_1 auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dagegen ist u_0 i.a. nicht von der Klasse $C^2(\mathbb{R})$ wie in Satz 2.1 gefordert. Um $u \in C^2\big(\mathbb{R} \times (0,\ell)\big)$ zu erreichen, müssten die sich aus $(2.8)_1$ ergebenden weiteren Kompatibilitätsbedingungen

$$u_{0xx}(0) = u_{xx}(0,0) = \frac{1}{c^2}u_{tt}(0,0) = 0$$

und $u_{0xx}(\ell) = 0$ erfüllt sein.

Die Lösung des Problems (2.8) kann mit Hilfe von Fourier-Reihen (Methode der Trennung von Variablen) in vollkommen anderer Form gewonnen und dargestellt werden.

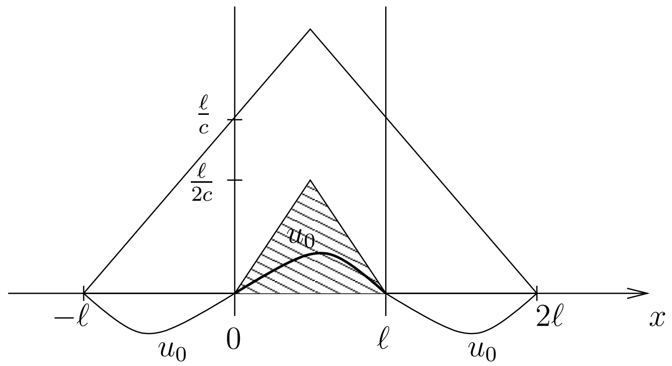

Abbildung 2.4: Fortsetzung des Anfangswertes u_0

Beispiel 2.3 Ein in $(0,\ell)$ eingespanntes Seil werde an der Stelle $x = \frac{\ell}{2}$ auf die Höhe $h > 0$ angehoben und anschließend losgelassen. Dann liefern die ungeraden und 2ℓ-periodischen Anfangswerte u_0, u_1 mit

$$u_0(x) = \frac{2}{\ell}\begin{cases} hx\,, & 0 \le x < \ell/2 \\ h(\ell - x)\,, & \ell/2 \le x \le \ell \end{cases}\,, \quad u_1(x) = 0$$

nach (2.6) die formale Lösung

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\big)\,.$$

Da u_0 in $x = \ell/2$ nicht differenzierbar ist, wird die Lösung im Raum-Zeit-Gebiet $\mathbb{R} \times (0,\ell)$ Linien aufweisen, auf denen sie nicht differenzierbar ist. Für $0 \le t \le \min(\frac{x}{c}, \frac{\ell-x}{c})$, $x \in (0,\ell)$, erhält man

$$u(t,x) = h\begin{cases} x\,, & x + ct \le \frac{\ell}{2} \\ \frac{\ell}{2} - ct\,, & x - ct \le \frac{\ell}{2} \le x + ct \\ \ell - x\,, & x - ct \ge \frac{\ell}{2} \end{cases}\,.$$

Die Unstetigkeitsstellen von u_x laufen von $x = \frac{\ell}{2}$ in $t = 0$ mit der Geschwin-

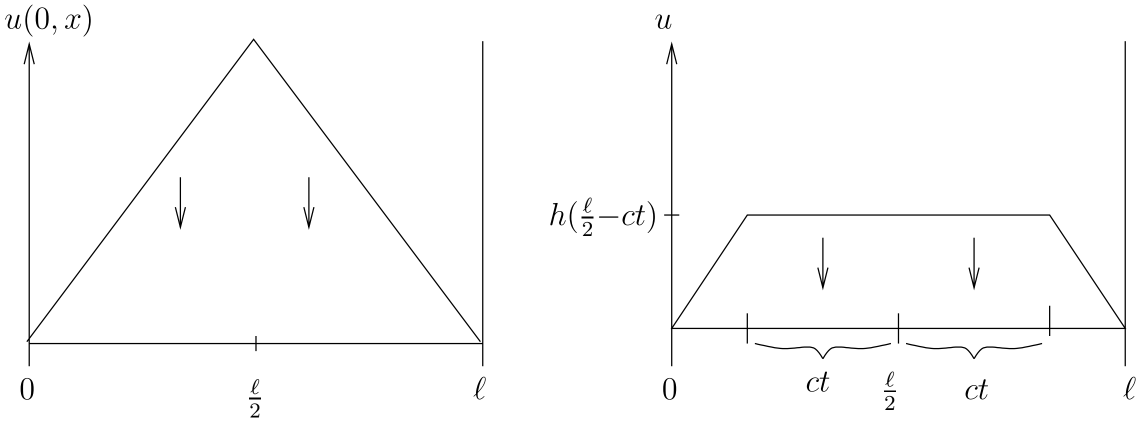

Abbildung 2.5: Das eingespannte Seil

digkeit $\pm c$ im Zeitintervall $[0, \frac{\ell}{2c}]$ nach 0 und nach ℓ und werden dort reflektiert, um sich für $t = \frac{\ell}{c}$ wieder in $x = \frac{\ell}{2}$ zu treffen. In $t = \frac{\ell}{2c}$ ist die potentielle Energie des elastischen Seils komplett in kinetische Energie umgewandelt $\big(u(\frac{\ell}{2c}, \cdot) \equiv 0\,,\ u_t(\frac{\ell}{2c}, \cdot) \neq 0\big)$.

2.3 Die inhomogene Wellengleichung

Die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x) \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

mit homogenen Randwerten $u_0 = u_1 = 0$ kann mit der Methode der Variablentransformation wie in §2.1 gelöst werden. Sei also

$$\xi = x + ct,\ \eta = x - ct \quad \text{und} \quad v(\xi,\eta) = u(t,x)\,.$$

Eine kleine Rechnung liefert, s. (2.3),

$$v_{\xi,\eta}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4c^2}\,F(\xi,\eta) \quad \text{mit} \quad F(\xi,\eta) = f(t,x)\,.$$

Nach Integration bzgl. ξ' von η bis ξ erhält man

$$v_\eta(\xi,\eta) - v_\eta(\eta,\eta) = -\frac{1}{4c^2}\int_\eta^\xi F(\xi',\eta)\,d\xi'\,, \tag{2.9}$$

wobei der Term $v_\eta(\eta,\eta)$ wegen

$$v_\eta(\eta,\eta) = \frac{\partial}{\partial\eta}\,u\big(\frac{\xi-\eta}{2c},\frac{\xi+\eta}{2}\big)\Big|_{\xi=\eta} = \big(-\frac{1}{2c}u_t + \frac{1}{2}\,u_x\big)(0,x) = \frac{1}{2}\big(u_{0x} - \frac{1}{c}u_1\big)(x) = 0$$

verschwindet. Anschließend integriert man (2.9) bzgl. η' von η bis ξ. Da $v(\xi,\xi) = u(0,x) = u_0(x)$ verschwindet, folgt die Gleichung

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{4c^2}\int_\eta^\xi \Big(\int_{\eta'}^\xi F(\xi',\eta')\,d\xi'\Big)\,d\eta'\,. \tag{2.10}$$

Zur Rücktransformation auf (t,x)-Variablen werden (t',x') durch

$$\xi' = x' + ct',\ \eta' = x' - ct'$$

eingeführt. Die Funktionaldeterminante dieser Transformation ist

$$\begin{vmatrix} \xi'_{x'} & \xi'_{t'} \\ \eta'_{x'} & \eta'_{t'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{vmatrix} = -2c\,.$$

Ferner besitzt das Integrationsgebiet $\eta \le \eta' \le \xi' \le \xi$, also $x - ct \le x' - ct' \le x' + ct' \le x + ct$, in (t',x')-Variablen die Dreieckgestalt

$$x - c(t-t') \le x' \le x + c(t-t') \quad \text{mit} \quad 0 \le t' \le t\,.$$

Damit lautet (2.10) jetzt

$$u(t,x) = \frac{1}{2c}\int_0^t \Big(\int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} f(t',x')\,dx'\Big)\,dt'\,. \tag{2.11}$$

Man beachte, dass das Integrationsgebiet gerade das in Abbildung 2.3 gezeichnete gleichschenklige Dreieck mit Basis $A(t,x)$ ist. Damit (2.11) eine bzgl. x oder t zweimal stetig differenzierbare Funktion liefert, muss neben $f \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ noch die Existenz der partiellen Ableitung $f_x \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ gefordert werden.

Sind die Anfangswerte u_0, u_1 von Null verschieden, so kann auf Grund der Linearität der Wellengleichung zur soeben gewonnenen Lösung u die in §2.1 konstruierte Lösung mit Anfangswerten u_0, u_1 addiert werden, um eine Lösung des voll inhomogenen Problems zu finden (*Superpositionsprinzip*).

Satz 2.4 *Seien $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ mit $f_x \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ gegeben. Dann besitzt die inhomogene Wellengleichung*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f \qquad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(0,\cdot) &= u_0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \\ u_t(0,\cdot) &= u_1 \qquad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$; diese Lösung hat die Gestalt

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_0^t \Big(\int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} f(t',x')dx'\Big)dt' \end{aligned}$$

(Formel von d'Alembert).

3 Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= f && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0) &= u_0 && \text{für } t = 0 \\ u_t(0) &= u_1 && \text{für } t = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

wird durch die *Methode der sphärischen Mittel* auf eine modifizierte Wellengleichung im $\mathbb{R}^1$ zurückgeführt.

3.1 Die Methode der sphärischen Mittel

Definition 3.1 (1) Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y - x| < r\}$ die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt x; dabei bezeichne $|\cdot|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Ist $x = 0$, schreiben wir auch kurz $B_r = B_r(0)$. Auf dem Rand

$$\partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y - x| = r\}$$

bezeichne *do* das Oberflächenmaß und ω_n die Oberfläche von ∂B_1; es gilt also

$$\omega_n = \int_{\partial B_1} 1 \, do = 2 \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2))}$$

und folglich $\int_{\partial B_r} 1 \, do = \omega_n r^{n-1}$. Dabei ist Γ die Gamma-Funktion mit den speziellen Funktionswerten

$$\Gamma(k+1) = k!, \quad \Gamma(k+1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k} \sqrt{\pi}\,, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner folgt für das n-dimensionale Volumen (Maß) der n-dimensionalen Kugel B_r

$$\int_{B_r} 1 \, dx = \frac{\omega_n}{n} r^n.$$

Es bezeichne $N = N(y) = \frac{y-x}{|y-x|}$ den äußeren Normalenvektor in $y \in \partial B_r(x)$ an $B_r(x)$.

(2) Für eine Funktion $h \in C^0(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\begin{aligned} M_h(x, r) &:= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} h(y) \, do_y \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1} h(x + ry) \, do_y \end{aligned}$$

das *sphärische Mittel* der Funktion h über $\partial B_r(x)$, $r > 0$.

Offensichtlich kann man mit der zweiten Darstellung von $M_h(x,r)$ für $r \leq 0$ eine Fortsetzung von $M_h(x,r)$ für negative r definieren, und es gilt

$$\begin{aligned} &M_h(x,r) = M_h(x,-r)\,, \\ &M_h(x,r) \to M_h(x,0) = h(x) \quad \text{für } r \to 0 \\ &h \in C^k(\mathbb{R}^n) \Rightarrow M_h \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Lemma 3.2 *Für $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt die* Gleichung von Darboux

$$\boxed{\Big(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\Big)\, M_h(x,r) = \Delta_x M_h(x,r)\,.} \tag{3.3}$$

mit den „Anfangswerten“

$$M_h(x,0) = h(x), \quad \partial_r M_h(x,0) = 0\,. \tag{3.4}$$

Beweis Da $M_h(x,r)$ in r stetig differenzierbar und gerade ist, muss $\partial_r M_h(x,0) = 0$ gelten; die Eigenschaft $M_h(x,0) = h(x)$ folgt aus der Stetigkeit von h, s. (3.2).

Zum Beweis der Formel (3.3) leiten wir zuerst eine für spätere Anwendungen wichtige Beziehung zwischen Volumen- und Oberflächenintegralen her. Der Gauß'sche Satz liefert die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} \Delta h(z)dz &= \int_{B_r} \Delta_z h(x+z)\,dz \\ &= \int_{\partial B_r} N \cdot \nabla_y h(x+y)\,do_y \\ &= r^{n-1}\int_{\partial B_1} N \cdot \nabla h(x+ry)\,do_y \\ &= r^{n-1}\int_{\partial B_1} \partial_r h(x+ry)\,do_y \\ &= r^{n-1}\partial_r \int_{\partial B_1} h(x+ry)\,do_y\,, \end{aligned}$$

also die Identität

$$\int_{B_r(x)} \Delta h(z)dz = r^{n-1}\partial_r\Big(\frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_r} h\,do\Big)\,. \tag{3.5}$$

Mit anderen Worten gilt – nach Einführung von Polarkoordinaten für $z \in B_r$ –

$$\begin{aligned} \partial_r M_h(x,r) &= r^{1-n}\int_0^r \rho^{n-1}\Delta_x\Big(\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1} h(x+\rho y)do_y\Big)d\rho \\ &= r^{1-n}\int_0^r \rho^{n-1}\Delta_x\, M_h(x,\rho)d\rho\,. \end{aligned}$$

Eine weitere Differentiation nach r liefert

$$\partial_r^2 M_h(x,r) = \frac{1-n}{r}\,\partial_r M_h(x,r) + \Delta_x\, M_h(x,r)$$

und damit die Behauptung. ■

Lemma 3.3 *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Wellengleichung* (3.1) *mit $f \equiv 0$ und Anfangswerten u_0, u_1 und sei*

$$M_u(x,r,t) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1} u(t,x+ry)\,do_y\,.$$

Dann ist M_u zweimal stetig partiell differenzierbar bzgl. r und t und genügt der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung

$$\partial_t^2 M_u = c^2\big(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\,\partial_r\big)M_u \tag{3.6}$$

mit den Anfangswerten

$$M_u(x,r,0) = M_{u_0}(x,r), \quad \partial_t M_u(x,r,0) = M_{u_1}(x,r)\,. \tag{3.7}$$

Ferner gilt $M_u(x,0,t) = u(t,x)$.

Beweis Mit Lemma 3.2 folgt sofort aus (3.1), $f \equiv 0$,

$$\begin{aligned}\partial_t^2 M_u(x,r,t) &= \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1}\partial_t^2 u(t,x+ry)\,do_y\\ &= \frac{c^2}{\omega_n}\int_{\partial B_1}\Delta_x u(t,x+ry)\,do_y\,,\end{aligned}$$

also $\partial_t^2 M_u = c^2\Delta_x M_u = c^2\big(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\,\partial_r\big)\,M_u$. Die Identitäten (3.7) sind trivial. ■

3.2 Die homogene Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

Für $n = 3$ läßt sich (3.6) zu

$$\partial_t^2 M_u = c^2(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\,\partial_r)M_u = \frac{1}{r}c^2\partial_r^2(rM_u)\,,$$

also zu

$$\partial_t^2(rM_u) = c^2\partial_r^2(rM_u)\,, \tag{3.8}$$

umschreiben. Für festes $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt rM_u folglich eine eindimensionale Wellengleichung bzgl. (t,r) mit den Anfangswerten

$$rM_u\big|_{t=0} = rM_{u_0}, \quad \partial_t(rM_u)\big|_{t=0} = rM_{u_1}\,. \tag{3.9}$$

Nach Satz 2.1 besitzt (3.8) – (3.9) die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} rM_u(x,r,t) &= \frac{1}{2}\big((r+ct)M_{u_0}(x,r+ct)+(r-ct)M_{u_0}(x,r-ct)\big) \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} sM_{u_1}(x,s)ds\,. \end{aligned}$$

Da $M_{u_1}(x,\cdot)$ gerade ist, verschwindet das Integral $\int_{ct-r}^{r-ct} s\,M_{u_1}(x,s)ds$, und nach Division durch $r \neq 0$ erhält man

$$\begin{aligned} M_u(x,r,t) &= \frac{1}{2r}\big((ct+r)M_{u_0}(x,ct+r)-(ct-r)M_{u_0}(x,ct-r)\big) \\ &\quad + \frac{1}{2cr}\int_{ct-r}^{ct+r} s\,M_{u_1}(x,s)\,ds\,. \end{aligned}$$

Jetzt kann der Grenzübergang $r \to 0$ durchgeführt werden, indem der erste Term auf der rechten Seite als Differenzenquotient in r aufgefasst wird. Für $r \to 0$ folgt mit $(3.2)_2$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \partial_r\big((ct+r)M_{u_0}(x,ct+r)\big)\big|_{r=0} &+\ \ tM_{u_1}(x,ct) \\ &= \partial_t\big(tM_{u_0}(x,ct)\big) &+\ \ tM_{u_1}(x,ct)\,. \end{aligned}$$

Satz 3.4 *Für Anfangswerte $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ besitzt die homogene Wellengleichung*

$$u_{tt} - c^2\Delta u = 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$; diese ist durch die Kirchhoff'sche Formel

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,x) &= tM_{u_1}(x,ct) + \partial_t\big(tM_{u_0}(x,ct)\big) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} u_1 do + \partial_t\Big(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} u_0 do\Big) \end{aligned}} \tag{3.10}$$

gegeben.

Beweis Die obige Herleitung führt eindeutig zur Darstellung (3.10). Der Beweis, dass (3.10) eine Lösung liefert, benutzt die auf (3.3) basierende Gleichung

$$\Delta_x(tM_h)(x,t) = t\Delta M_h = t(\partial_t^2 + \frac{2}{t}\,\partial_t)M_h = \partial_t^2(tM_h)$$

sowie $\partial_t M_h(x,0) = 0 \quad$ für $h \in C^2(\mathbb{R}^n)\,.$ ■

Bemerkung 3.5 (1) Da in (3.10) nur Randintegrale über $\partial B_{ct}(x)$ auftreten, ist das Einflussgebiet $E(\xi)$ eines Punktes $\xi \in \mathbb{R}^3$ der Rand eines Doppelkegels:

$$E(\xi) = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 :\ |x-\xi| = ct\}\,.$$

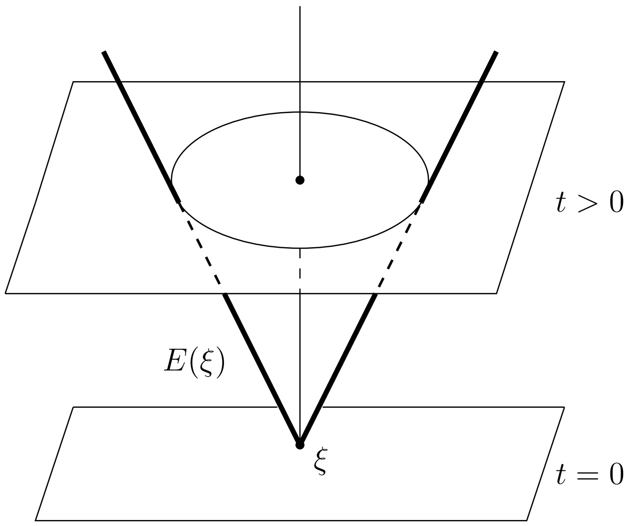

Abbildung 3.1: Das Einflussgebiet $E(\xi)$ der Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

Für eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichne

$$\operatorname{supp} h = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \; h(x) \neq 0\}}$$

den Träger (support) von h. Nun gelte für die Anfangswerte u_0, u_1 die Beziehung

$$\operatorname{supp} u_0 \cup \operatorname{supp} u_1 \subset \overline{B_\varepsilon(\xi)}, \quad \varepsilon > 0\,;$$

d.h., das Anfangssignal ist in der Kugel $\overline{B_\varepsilon(\xi)}$ konzentriert. Dann setzt für einen Punkt $x \notin \overline{B_\varepsilon(\xi)}$ das Signal scharf zum Zeitpunkt

$$t_0 = \frac{1}{c} \operatorname{dist}\big(x, \overline{B_\varepsilon(\xi)}\big) = \frac{1}{c}(|x - \xi| - \varepsilon)$$

ein und endet zum Zeitpunkt

$$t_1 = \frac{1}{c}(|x - \xi| + \varepsilon)$$

(*Huygens'sches Prinzip*).

(2) Analog zu (1) sieht man, dass $u(t, x)$ nur von den Daten aus dem Abhängigkeitsgebiet

$$A(t, x) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \; |y - x| = c|t|\}$$

bestimmt wird.

(3) Eine andere Darstellung der Lösung (3.10) ist

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B_{ct}(x)} \big(tu_1(y) + u_0(y) + (y - x) \cdot \nabla u_0(y)\big) do_y\,. \tag{3.11}$$

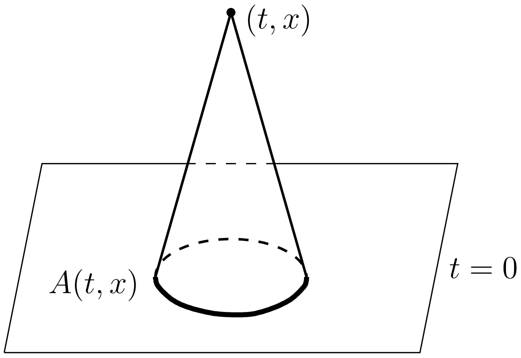

Abbildung 3.2: Das Abhängigkeitsgebiet $A(t,x)$

Aus den Eigenschaften $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ folgt also *nur* $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, d.h., man verliert eine Differenzierbarkeitsordnung von $t=0$ zu $t>0$. Der physikalische Grund liegt in der „Fokussierung" von Störungen in den Anfangswerten für wachsende $t>0$. Also sind $u(T,\cdot)$ und $u_t(T,\cdot)$ keine zulässigen Anfangswerte für die Wellengleichung auf $[T,\infty)\times\mathbb{R}^3$, $T>0$, im Sinne von Satz 3.4, obwohl die Lösung u für alle $t\in\mathbb{R}$ in C^2 existiert. Der mathematische Hintergrund ist die falsche Wahl der Funktionenräume. Die Räume $L^2(\mathbb{R}^3)$, $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ sind der Wellengleichung besser als die Räume C^k angepasst.

(4) Es gelte $\operatorname{supp} u_0 \cup \operatorname{supp} u_1 \subset B_r(0)$. Dann folgt aus (3.11) für beliebiges $x\in\mathbb{R}^3$ und für große $t>0$ die Abschätzung

$$|u(t,x)| \le \frac{M}{t^2}\big(t\|u_1\|_\infty + \|u_0\|_\infty + ct\|\nabla u_0\|_\infty\big) = O\big(\frac{1}{t}\big)\,,$$

wobei die Konstante $M = \frac{1}{4\pi c^2}\cdot\ \big(\text{Oberflächenmaß von } \partial B_{ct}(x)\cap B_r(0)\big)$ gleichmäßig durch Cr^2 beschränkt ist. Die Signalstärke $|u(t,x)|$ klingt also – unabhängig von der Lage von x – wie $\frac{1}{t}$ ab.

3.3 Der Fall $n=2$ und die Abstiegsmethode von Hadamard

Sei $u(t,x) = u(t,x_1,x_2)$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$. Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall gestattet die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung (vgl. (3.6) in $\mathbb{R}^3$)

$$\partial_t^2 M_u = c^2(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\,\partial_r)M_u$$

jetzt keine einfache Lösung. Stattdessen wird bei der Abstiegsmethode von Hadamard im $2D$-Problem künstlich eine x_3-Variable eingeführt, die anschließend auf 0 gesetzt wird. Dementsprechend betrachtet man

$$v(t,x_1,x_2,x_3) := u(t,x_1,x_2)$$

als Lösung der $3D$-Wellengleichung $v_{tt} - c^2 \Delta v = 0$ mit Anfangswerten

$$v(0, x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1, x_2), \quad v_t(0, x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2) . \tag{3.12}$$

Nach Satz 3.4 ist die eindeutige Lösung $v(t, x_1, x_2, x_3)$ zu den Anfangswerten (3.12) durch (3.10) gegeben. Für $x_3 = 0$ folgt mit der Notation $x^0 = (x_1, x_2, 0)$

$$\begin{aligned} u(t, x_1, x_2) &= v(t, x_1, x_2, 0) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x^0)} u_1(y_1, y_2) do_y + \partial_t \Big(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x^0)} u_0(y_1, y_2) do_y \Big) , \end{aligned}$$

wobei die Oberflächenintegrale $\int_{\partial B_{ct}(x^0)} (\ldots) do_y$ über den Rand der dreidimensionalen Kugel $B_{ct}(x^0)$ laufen. Als konkrete Parametrisierung der oberen Hälfte $\partial B^+_{ct}(x^0) = \{y \in \partial B_{ct}(x^0) : y_3 > 0\}$ benutzen wir

$$y_3 = y_3(y_1, y_2) = \sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}$$

für alle $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < c^2 t^2$. Für das Oberflächenelement do_y berechnet man den Term

$$1 + \Big(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\Big)^2 = \frac{c^2 t^2}{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} .$$

Damit erhält man z.B.

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B^+_{ct}(x^0)} u_1(y_1, y_2) do_y \\ &\quad = \int_{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < c^2 t^2} u_1(y_1, y_2) \frac{c|t|}{\sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2 , \end{aligned}$$

bzw. in der üblichen zweidimensionalen Notation

$$c|t| \int_{B_{ct}(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}} dy$$

mit $y = (y_1, y_2) \in B_{ct}(x) \subset \mathbb{R}^2$. Analog werden die „untere Hälfte" $\partial B^-_{ct}(x^0) \subset \mathbb{R}^3$ und die Terme mit u_0 behandelt. Schließlich liefert Satz 3.4 die folgende Aussage:

Satz 3.6 Für Daten $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ besitzt die homogene Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ u(0) &= u_0 && \text{für } t = 0 \\ u_t(0) &= u_1 && \text{für } t = 0 \end{aligned}$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c}\int_{B_{ct}(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{c^2t^2-|x-y|^2}}dy \\ &+ \partial_t\Big(\frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c}\int_{B_{ct}(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2t^2-|x-y|^2}}\,dy\Big)\,. \end{aligned}} \tag{3.13}$$

Beweis Für die in (3.12) definierten, von $x_3 \in \mathbb{R}$ unabhängigen Anfangswerte liefert Satz 3.4 wegen der Eindeutigkeitsaussage eine ebenfalls von x_3 unabhängige Lösung v. Deshalb ist die durch (3.13) gegebene Funktion u tatsächlich eine Lösung der $2D$-Wellengleichung.

Ist $u(t,x_1,x_2)$ eine Lösung der $2D$-Wellengleichung mit verschwindenden Anfangswerten, so ist $v(t,x_1,x_2,x_3) = u(t,x_1,x_2)$ eine Lösung der $3D$-Wellengleichung mit $v(0) = v_t(0) = 0$. Dann beweist Satz 3.4 die Eindeutigkeit $u = v = 0\,.$ ■

Bemerkung 3.7 (1) Die in (3.13) auftretenden zweidimensionalen Integrale führen zu den Aussagen

$$\begin{aligned} A(t,x) &= \overline{B_{ct}(x)}\,, \\ E(\xi) &= \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 :\ |x-\xi| \le c|t|\}\,. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall sind $A(t,x)$ bzw. $E(\xi)$ jetzt eine „gefüllte“ Kreisscheibe bzw. ein „gefüllter“ Kegel. Es gilt also nicht das Huygens'sche Prinzip. Sind $u_0, u_1 \in C_0^\infty\big(B_r(0)\big)$, setzt für $x \notin \overline{B_r(0)}$ das Signal in $t = \frac{1}{c}(|x|-r)$ scharf ein und endet i.a. nie! Allerdings klingt das Signal im Punkt x mindestens wie $\frac{1}{t}$, im Fall $u_1 \equiv 0$ sogar wie $\frac{1}{t^2}$ für $t \to \infty$ ab.

(2) Aus $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ folgt i.a. nicht $u(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Auf Grund des Terms $(c^2t^2-|x-y|^2)^{-1/2}$ in (3.13) verliert man etwa die Ordnung $\frac{1}{2}$ an Regularität.

Ausblick 3.8 Die Fälle $n = 5$, $n = 7$ etc. ungerader Dimension werden analog zum Fall $n = 3$ behandelt. In allen ungeraden Raumdimensionen außer $n = 1$ gilt das Huygens'sche Prinzip. Die Lösungen der homogenen Wellengleichung in geraden Raumdimensionen $n = 2k$ erhält man mit der Hadamard'schen Abstiegsmethode aus dem Fall $n = 2k+1$. Für $n = 2k$ gilt das Huygens'sche Prinzip nicht. In jeder Raumdimension n verliert man von $t = 0$ zu $t > 0$ etwa $\frac{n-1}{2}$ Ordnungen an Regularität.

3.4 Die inhomogene Wellengleichung und Duhamel's Prinzip

Die inhomogene Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2\Delta u &= f(t,x) && \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ u(0) &= 0 && \text{für } t=0 \\ u_t(0) &= 0 && \text{für } t=0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

werde nur für die trivialen Anfangswerte $u_0 = u_1 = 0$ betrachtet, da die Lösung für den Fall $f \equiv 0$ mit beliebigen Anfangswerten nach §§3.2 – 3.3 bekannt ist und da für die lineare Wellengleichung das Superpositionsprinzip gilt. Zur Lösung von (3.14) benutzen wir eine Methode, die verwandt ist zur Formel der *Variation der Konstanten* aus der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Für fest gewähltes, aber beliebiges $s \ge 0$ sei $U = U(s,t,x)$ die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - c^2\Delta)\, U(s,t,x) &= 0 && \text{für } t > s\,,\ x\in\mathbb{R}^n \\ U(s,s,x) &= 0 && \text{für } t = s\,,\ x\in\mathbb{R}^n \\ U_t(s,s,x) &= f(s,x) && \text{für } t = s\,,\ x\in\mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.15}$$

und sei

$$u(t,x) := \int_0^t U(s,t,x)\,ds\,.$$

Satz 3.9 *Sei f eine glatte, d.h. unendlich oft stetig differenzierbare Funktion auf* $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$*, und sei für jedes $s \ge 0$ die Funktion $U(s,t,x)$ die Lösung der homogenen Wellengleichung* (3.15)*. Dann ist*

$$u(t,x) = \int_0^t U(s,t,x)\,ds \tag{3.16}$$

die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen Wellengleichung (3.14)*.*

Beweis Für $f \in C^\infty$ implizieren die expliziten Lösungsformeln (3.10), falls $n = 3$, bzw. (3.13), falls $n = 2$, dass $U(s,t,x)$ zweimal stetig partiell differenzierbar bzgl. t, x ist. Die Probleme der Regularität und sogar der Integrierbarkeit von $U(s,t,x)$ bzgl. $s \in [0,t]$ sollen hier – außer für $n = 3$ in Korollar 3.10 – nicht weiter betrachtet werden. Aus (3.16) folgt $u(0,x) = 0$ sowie

$$u_t(t,x) = \underbrace{U(t,t,x)}_{=0} + \int_0^t U_t(s,t,x)\,ds\,,$$

also $u_t(0,x) = 0$. Eine weitere Differentiation nach t liefert wegen (3.15)

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) &= U_t(t,t,x) + \int_0^t U_{tt}(s,t,x)\,ds \\ &= f(t,x) + c^2\Delta\int_0^t U(s,t,x)\,ds\,. \end{aligned}$$

Also löst u die Gleichung (3.14). Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus den Eindeutigkeitsaussagen der Sätze 3.4 bzw. 3.6. Der allgemeine Fall $n \geq 4$ soll hier nicht weiter untersucht werden. ■

Im Fall $n = 3$ liefert die Lösungsformel (3.10) mit Anfangswert $u_0 = 0$, $u_1 = f(s, \cdot)$ in $t = s$ (für alle $s \geq 0$) die folgende konkrete Lösungsformel für (3.14).

Korollar 3.10 *Für $n = 3$ ist*

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \frac{1}{t-s} \Big(\int_{\partial B_{c(t-s)}(x)} f(s,y)\, do(y) \Big)\, ds \tag{3.17}$$

die eindeutige Lösung der inhomogenen Wellengleichung (3.14)*. Insbesondere wird das Abhängigkeitsgebiet $A(t,x)$ von u in (t,x) durch den Rand eines Kegels im $\mathbb{R}^4$, nämlich durch*

$$A(t,x) = \{(s,y) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 : |y-x| = c|t-s|,\ 0 \leq s \leq t\}$$

beschrieben.

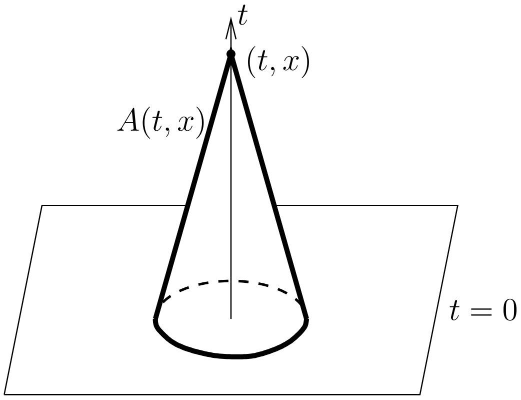

Abbildung 3.3: Das Abhängigkeitsgebiet $A(t,x)$ für die inhomogene Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

Bemerkung 3.11 (1) Im Fall $n = 3$ genügt die Funktion

$$U(s,t,x) = \frac{1}{4\pi c^2 (t-s)} \int_{\partial B_{c(t-s)}(x)} f(s,y)\, do(y)$$

der Abschätzung $|U(s,t,x)| \leq (t-s)\, \|f\|_\infty$. Deshalb ist das äußere Integral in (3.17) bzgl. $s \in (0,t)$ nicht singulär, sondern ein gewöhnliches Riemann-Integral. Die Voraussetzung $f \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^3)$ impliziert bereits $u \in C^2\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^3\big)$.

(2) Bei verschwindenden Anfangswerten sei u die durch eine äußere Kraft f mit $\operatorname{supp} f \subset [r,r] \times \overline{B_r(0)}$ angeregte Welle. Nach (3.17) setzt für $n = 3$ das Signal in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{B_r(0)}$ irgendwann ein und endet nach einem Zeitintervall der Länge $2r/c$ scharf. Dieses Signal wird allein durch die Funktionswerte von f, d.h. ohne durch f_t und ∇f gegebene Informationen bestimmt.

Im Fall $n = 2$ setzt das Signal irgendwann ein und klingt für $t \to \infty$ ab. Es hängt ebenfalls nur von f ab, s. (3.13).

Für $n \geq 4$ setzt das Signal scharf ein und endet scharf, falls n ungerade ist, bzw. klingt für $t \to \infty$ ab, falls n gerade ist. Die Form des Signals hängt nicht nur von den Funktionswerten $f(t,x)$ ab, sondern auch von ∇f $(n = 4, 5)$ und von u.U. höheren Ableitungen von f ab; das Signal wird also „verzerrt“.