Skript zur Vorlesung
Elementare partielle Differentialgleichungen

Prof. Dr. R. Farwig

SS 2003

Technische Universität Darmstadt

1 Mathematische Modellierung

Partielle Differentialgleichungen kommen in den Naturwissenschaften (Physik, Chemie, Biologie), den Ingenieurwissenschaften (Maschinenbau, Elektrotechnik, Mechanik, Materialwissenschaften, Bauingenieurwesen, Geowissenschaften etc.), aber auch den Wirtschaftswissenschaften (insbesondere Finanzmathematik) vor. Zudem haben sie über Jahrhunderte die Entwicklung der mathematischen Analysis beflügelt. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, die entweder eine rein zeitliche Entwicklung (Anfangswertprobleme) oder eine rein räumliche, jedoch eindimensionale Entwicklung (Randwertprobleme) beschreiben, modellieren partielle Differentialgleichungen entweder Vorgänge in mehreren Raumdimensionen oder räumlich-zeitliche Vorgänge.

Im Folgenden sollen – ausgehend von einem einfachen räumlich eindimensionalen und zeitlich veränderlichen Prozess – Modelle aus verschiedenen Anwendungsgebieten und mit steigender Komplexität hergeleitet werden.

Eine *Zustandsvariable* $u = u(t, x)$ beschreibe die *Dichte* einer gewissen Größe, wie z.B. Masse, Energie, Bakterien, Autos etc. am Ort $x \in \mathbb{R}$ und zum Zeitpunkt t in einer Röhre kleinen konstanten Querschnitts A.

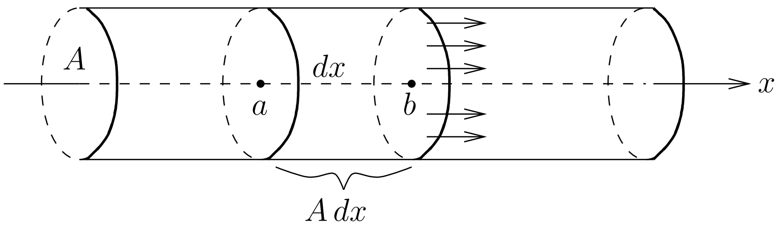

Abbildung 1.1: Zur Massenbilanz in der Röhre

Dann ist $u(t, x)\, Adx$, $dx = b - a$, die im Röhrenabschnitt Adx enthaltene Menge. Der *Fluss* der Größe u werde im Raum-Zeitpunkt (t, x) durch die *Flussfunktion* $\phi = \phi(t, x, u, \ldots)$ beschrieben; dabei werden wegen des kleinen Querschnitts A Fluktuationen in den zu x orthogonalen Raumrichtungen vernachlässigt. Also ist $A\phi(t, x)$ die Menge, die zur Zeit t durch den Querschnitt A an der Position x fließt. Als Konvention bedeutet dabei $\phi > 0$ ein Fluss nach rechts in Richtung wachsender x–Werte. Schließlich sei $f = f(t, x)$ ein *Quellterm*, so dass $f(t, x)\, Adx$ die Menge bezeichnet, die im Röhrenabschnitt Adx zur Zeit t erzeugt ($f > 0$, Quelle) oder vernichtet ($f < 0$, Senke) wird.

Damit erhält man in $[t_1, t_2] \times [a, b]$ $(\times A)$ die *Bilanzgleichung*

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(u(t_2, x) - u(t_1, x)\big)\, Adx \\ = \int_{t_1}^{t_2} \big(A\phi(t, a) - A\phi(t, b)\big)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b f(t, x)\, A\, dx\, dt\end{aligned}$$

in Integralform. Unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen folgt nach Division durch $A(t_2 - t_1)(b - a)$ im Grenzfall $t_2 \to t_1$, $b \to a$ die *Erhaltungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x) = f(t,x)$$

oder kürzer

$$\boxed{u_t + \phi_x = f\,.} \tag{1.1}$$

An dieser Stelle fehlt noch eine sich aus dem konkreten Problem ergebende *Zustandsgleichung*

$$\phi = \phi(t, x, u, \ldots)\,,$$

um eine partielle Differentialgleichung für die gesuchte Funktion u zu erhalten.

Beispiel 1.1 Der Fluss ϕ sei proportional zu u,

$$\phi(t,x,u) = cu\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Im Fall $f \equiv 0$ (keine Quellen oder Senken) liefert (1.1) die *Konvektionsgleichung* (auch *Advektions- oder Transportgleichung*)

$$\boxed{u_t + cu_x = 0\,.} \tag{1.2}$$

Zur Lösung führen wir neue Variablen

$$\xi = x - ct\,, \quad \tau = t \tag{1.3}$$

sowie

$$v(\tau, \xi) := u(t,x) = u(\tau, \xi + c\tau)$$

ein. Dann erfüllt v die Gleichung

$$v_\tau = u_t + cu_x = 0\,,$$

und läßt sich folglich in der Form $v(\tau, \xi) = F(\xi)$ schreiben. Demnach besitzt u die Darstellung

$$u(t,x) = F(x - ct) \tag{1.4}$$

und wird als *travelling wave* bezeichnet. Die Konstante c ist die *Transportge-*

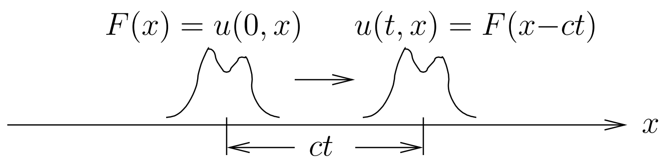

Abbildung 1.2: Eine travelling wave–Lösung

schwindigkeit, mit der die Anfangsinformation $u(0,x) = F(x)$ im Falle $c > 0$ nach rechts transportiert wird.

Beispiel 1.2 Bekanntlich wird ein einfacher Wachstums- oder Zerfallsprozess durch die gewöhnliche Differentialgleichung $\frac{du}{dt} = \lambda u$ ($\lambda > 0$ oder $\lambda < 0$) mit Lösung $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ modelliert. Mit dem Quellterm $f(u) = \lambda u$ ($\lambda > 0$: Quelle, $\lambda < 0$: Senke) und der Zustandsgleichung $\phi = cu$ liefert (1.1) die inhomogene Konvektionsgleichung

$$u_t + cu_x = \lambda u\,,$$

die ebenfalls mit der in Beispiel 1.1 beschriebenen Methode gelöst werden kann. Allgemeiner erhält man mit $f = f(t, x, u)$ die *Konvektions-Reaktionsgleichung*

$$u_t + cu_x = f(t, x, u)\,.$$

Beispiel 1.3 Es bezeichne $u(t, x)$ die Anzahl von Autos zur Zeit t pro Straßenkilometer auf einer einspurigen Straße und $\phi(t, x, u)$ die Anzahl von Autos, die pro Stunde den Raum-Zeitpunkt (t, x) passieren. In einem einfachen *Staumodell* wird ϕ durch

$$\phi = \phi(u) = \alpha u(\beta - u)\,, \quad \alpha, \beta > 0\,,$$

modelliert; d.h., für $0 \leq u \ll \beta$ wächst $\phi(u)$ linear wie $\alpha\beta u$ an, für $u \approx \beta$ dagegen wird die große Dichte an Autos den Verkehrsfluss allmählich zum Erliegen bringen. Für $f \equiv 0$ liefert (1.1) die *Staugleichung*

$$u_t + \alpha\big(u(\beta - u)\big)_x = 0\,.$$

Mit $v(t, x) = \beta - 2u(\frac{t}{\alpha}, x)$ erhält man daraus die *Burgers-Gleichung*

$$\boxed{v_t + vv_x = 0\,.} \tag{1.5}$$

Ein besonders vorausschauender Autofahrer wird die Geschwindigkeit nicht nur bei großer Verkehrsdichte ($u \approx \beta$) reduzieren, sonders bereits bei *Zunahme* der Verkehrsdichte vor ihm ($u_x > 0$). Mit Hilfe der verallgemeinerten Zustandsgleichung

$$\phi(u, u_x) = \alpha u(\beta - u) - \varepsilon' u_x\,, \quad \varepsilon' > 0\,,$$

entsteht die Gleichung 2. Ordnung

$$u_t + \alpha\big(u(\beta - u)\big)_x - \varepsilon' u_{xx} = 0$$

und nach Transformation auf v die *viskose Approximation der Burgers-Gleichung* (auch ebenfalls Burgers-Gleichung genannt) mit $\varepsilon = \varepsilon'/\alpha$

$$v_t + vv_x = \varepsilon v_{xx}\,. \tag{1.6}$$

Dabei heißt $\varepsilon > 0$ *Viskositätskoeffizient.* Es zeigt sich, dass der Term εv_{xx} zu einer Glättung der Lösungen von (1.6) gegenüber den Lösungen von (1.5) führt (glatter Verkehrsfluss statt Staubildung).

Beispiel 1.4 Sei u die Konzentration eines Gases (oder z.B. von Insekten/Bakterien in einer Röhre) bzw. sei u die Temperatur in einem Metallstab. Auf Grund der Stöße der einzelnen Teilchen untereinander wird sich Gas von hohen zu niedrigen Konzentrationen bewegen. Der Fluss ist dabei umso größer, je steiler das Konzentrationsgefälle, also der negative Gradient $-u_x$, ist. In diesem Falle wird die Zustandsgleichung $\phi(u) = -ku_x$ benutzt, so dass (1.1) zur *Diffusionsgleichung*

$$\boxed{u_t - ku_{xx} = 0} \tag{1.7}$$

mit der *Diffusionskonstanten* $k > 0$ führt.

Sei z.B. $\theta(t,x)$ die Temperatur, ρ die konstante Dichte und c die spezifische Wärme eines Metallstabs, so dass $u(t,x) = \rho c\theta(t,x)$ die Energiedichte bezeichnet. Nach dem klassischen *Fourier'schen Wärmeleitungsgesetz* ist der Wärmefluss ϕ proportional zu $-u_x$, d.h., mit dem Wärmeleitkoeffizienten $\kappa > 0$ gilt

$$\phi = -\kappa u_x\,.$$

Ist der Metallstab homogen und κ bzgl. x konstant, erhält man mit der Wärmediffusionskonstanten $k = \frac{\kappa}{\rho c} > 0$ die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\theta_t - k\theta_{xx} = 0\,. \tag{1.8}$$

Im allgemeinen Fall, in dem κ von x oder sogar von der Temperatur θ abhängt, folgen die komplexeren Gleichungen

$$\theta_t - \big(k(x)\theta_x\big)_x = 0$$

bzw. – als nichtlineares Problem –

$$\theta_t - \big(k(\theta)\theta_x\big)_x = 0\,.$$

Beispiel 1.5 Zur Herleitung der Wellengleichung betrachte man ein elastisches Seil mit Massendichte $\rho(t,x)$ und vertikaler Auslenkung $u(t,x)$ aus einer stationären Gleichgewichtslage. Wir nehmen an, dass bei kleiner Auslenkung und kleinen Winkeln ($|u_x| \ll 1$) die Spannung $T(t,x)$ im Punkt $\big(x, u(t,x)\big)$ stets tangential zum Seil gerichtet ist und dass horizontale Bewegungen vernachlässigt werden dürfen.

Da kein horizontaler Massenaustausch stattfindet, gilt für beliebige Abszissenwerte $a < b$ und Zeipunkte t unter Berücksichtigung des Bogenlängenelements $\sqrt{1+u_x^2}\,dx$ die Massenbilanz

$$\int_a^b \rho(t,x)\sqrt{1+u_x^2}\,dx = \int_a^b \rho_0(x)dx$$

mit einer geeigneten Funktion $\rho_0(x) > 0$. Nach Division durch $b-a$ und Grenzübergang $b-a \to 0+$ folgt die Gleichung

$$\rho(t,x)\sqrt{1+u_x^2} = \rho_0(x).$$

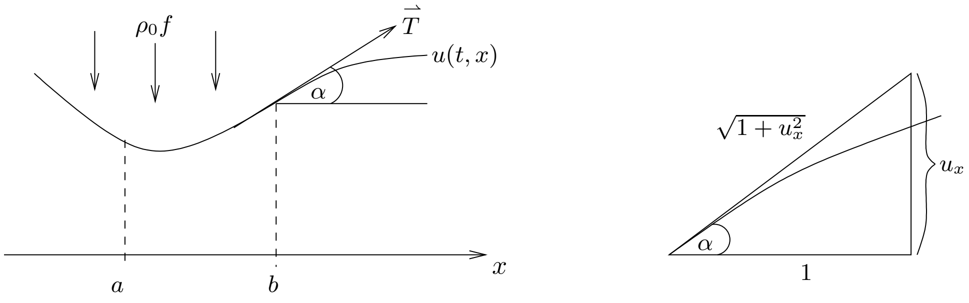

Abbildung 1.3: Zur Herleitung der Wellengleichung

Es bezeichne $\alpha(t,x)$ den Winkel des Seils mit der x-Achse; folglich gilt $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}$ und $\sin\alpha = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$. Die horizontale Kräftebilanz

$$T(t,b)\cos\alpha(t,b) = T(t,a)\cos\alpha(t,a) \quad \text{für alle } a < b$$

impliziert, dass $T(t,x)/\sqrt{1+u_x^2}$ von x unabhängig ist. Es gibt also eine konstante Spannungsgröße $T_0 > 0$ mit

$$\frac{T(t,x)}{\sqrt{1+u_x^2}} = T_0\,,$$

die zusätzlich in t konstant angenommen werden darf. Nach dem Newton'schen Gesetz gilt bei einer von außen auferlegten senkrecht wirkenden Kraftdichte $f(t,x)$ für die vertikale Kraftbilanz

$$\int_a^b \rho_0(x)u_{tt}dx = T(t,x)\sin\alpha(t,x)\Big|_a^b + \int_a^b \rho_0 f\,dx\,. \tag{1.9}$$

Wegen $\sin\alpha = u_x/\sqrt{1+u_x^2}$ kann der erste Term auf der rechten Seite durch

$$T_0 u_x(t,x)\Big|_a^b = T_0\int_a^b u_{xx}\,dx$$

ersetzt werden. Jetzt liefern Division durch $b-a$ und der Grenzübergang $b-a \to 0+$ in (1.9) die Differentialgleichung

$$\rho_0(x)u_{tt} = T_0\,u_{xx} + \rho_0(x)\,f(t,x)\,.$$

Schließlich führt man durch

$$c(x)^2 = \frac{T_0}{\rho_0(x)}$$

die Größe $c > 0$, die die Dimension einer Geschwindigkeit hat, ein. Damit erhält man, insbesondere wenn ρ_0 und damit auch c von x unabhängig sind, die klassische *eindimensionale Wellengleichung*

$$\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = f\,.} \tag{1.10}$$

Für das mehrdimensionale Analogon von (1.10) wird der Term u_{xx} durch den *Laplace-Operator*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u = \mathrm{div}\,(\nabla u)$$

von $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ersetzt. Die Wellengleichung

$$\boxed{u_{tt} - c^2 \Delta u = f} \tag{1.11}$$

beschreibt im $\mathbb{R}^2$ die Schwingungen einer elastischen Membran, im $\mathbb{R}^3$ u.a. die Ausbreitung von Schallwellen. Die Gleichung (1.11) ist die Grundlage zur Modellierung vieler physikalischer Phänomene, u.a. in der Akustik, der Strömungsmechanik und der Theorie der elektromagnetischen Wellen.

Beispiel 1.6 Wir betrachten ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas) der Dichte $\rho(t,x)$ und Geschwindigkeit $u(t,x)$ im Raum-Zeitpunkt (t,x). Im eindimensionalen Fall beschreibt $\phi = \rho u$ den Massenfluss, so dass die Massenbilanz

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \tag{1.12}$$

lautet. Dagegen ist im $\mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^2$) $u = (u_1, u_2, u_3)$ ein Geschwindigkeitsvektor. Zur Herleitung des Analogons von (1.12) betrachte man ein beliebiges, kleines Testvolumen $V \subset \mathbb{R}^3$. Nach dem Massenerhaltungsgesetz ist die zeitliche Änderung (Abnahme) der Gesamtmasse in V, also $-\int_V \rho_t\,dx$, gleich dem Massenfluss $\int_{\partial V} \rho u \cdot N\,d\sigma$ aus dem Testvolumen V heraus; dabei ist N der auf ∂V nach außen

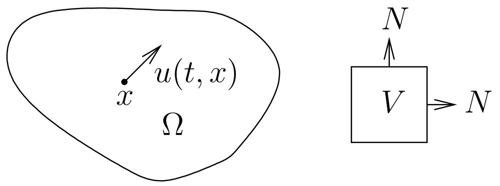

Abbildung 1.4: Zur Herleitung der Massenbilanz

gerichtete Normaleneinheitsvektor. Mit dem Gauß'schen Satz folgt

$$-\int_V \rho_t\,dx = \int_{\partial V} \rho u \cdot N\,d\sigma = \int_V \mathrm{div}(\rho u)\,dx\,.$$

Nach Division durch das Volumen $|V|$ von V liefert der Grenzübergang $|V| \to 0$ die sog. *Kontinuitätsgleichung*

$$\rho_t + \mathrm{div}\,(\rho u) = 0\,. \tag{1.13}$$

Zur Analysis der Kräftebilanz beschreibe $x(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$ eine Teilchenbahn, so dass also $u\big(t, x(t)\big) = \frac{dx}{dt}$ ist. Dann ist der Beschleunigungsvektor im Raumzeitpunkt (t, x) gegeben durch

$$a\big(t, x(t)\big) = \frac{d}{dt}\, u\big(t, x(t)\big) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \frac{dx_i}{dt}\,,$$

also

$$a(t, x) = u_t + \sum_{i=1}^{3} u_i\, \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_t + u \cdot \nabla u\,.$$

Nun treten in dem Fluid innere Kräfte wie z.B. Druckgradienten $\nabla p(t, x)$ auf. Ist das Fluid *reibungsfrei* und unterliegt einer äußeren Kraft ρf, liefert das Newton'sche Gesetz die *Euler-Gleichungen der Gasdynamik*

$$\begin{aligned} \rho(u_t + u \cdot \nabla u) + \nabla p &= \rho f\,, \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

An dieser Stelle wird jedoch noch eine Zustandsgleichung für p wie z.B. $p = \mathrm{const}\, \rho^\gamma$ mit $\gamma = \frac{5}{3}$ oder $\gamma = \frac{7}{5}$ benötigt.

Von großer Bedeutung ist der Fall *viskoser und inkompressibler* Fluide wie z.B. Wasser. Hier ist die Dichte ρ konstant, so dass (1.13) die Gleichung $\operatorname{div} u = 0$ liefert. Ferner wird ein Kraftterm $-\mu\Delta u$ in (1.14) eingefügt, der die Reibung von Teilchen unterschiedlicher Geschwindigkeit an gemeinsamen Grenzflächen berücksichtigt; $\mu > 0$ ist der Koeffizient der *dynamischen Zähigkeit.* Man erhält die *Navier-Stokes-Gleichungen*

$$\begin{aligned} \rho(u_t + u \cdot \nabla u) - \mu\Delta u + \nabla p &= \rho f\,, \\ \operatorname{div} u &= 0\,, \end{aligned} \tag{1.15}$$

wobei in diesem Fall $p = p(t, x)$ eine unbekannte Funktion ist, für die keine Zustandsgleichung gefordert werden darf. Wir dividieren (1.15) durch die konstante Dichte $\rho > 0$, führen einen neuen Druck p für p/ρ und den Koeffizienten der *kinematischen Zähigkeit* $\nu = \mu/\rho$ ein, und vernachlässigen darüber hinaus für kleine Geschwindigkeiten den nichtlinearen Term $u \cdot \nabla u$. Dadurch entsteht aus (1.15) das lineare Stokes-System

$$\begin{aligned} u_t - \nu\Delta u + \nabla p &= f\,, \\ \operatorname{div} u &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Im Fall zeitlich stationärer Strömungen erhält man die *stationäre Stokes-Gleichung*

$$\boxed{\begin{aligned} -\nu\Delta u + \nabla p &= f\,, \\ \operatorname{div} u &= 0\,; \end{aligned}} \tag{1.17}$$

hier hat der Druck $p(x)$ die Funktion eines Lagrange'schen Multiplikators, denn $u(x)$ soll eine Differentialgleichung unter der Nebenbedingung $\operatorname{div} u = 0$ lösen.

Beispiel 1.7 (Stationäre Probleme) (1) Eine Massenverteilung mit Dichte $\rho(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, im $\mathbb{R}^3$ besitzt ein Gravitationspotential $\varphi(x)$, welches durch die sog. *Poisson-Gleichung*

$$\Delta\varphi = 4\pi g\, \rho(x) \quad \text{im } \mathbb{R}^3$$

berechnet werden kann; dabei ist $g \doteq 9.81\, ms^{-2}$ die universelle Gravitationskonstante. Aus dem Potential φ leitet man das Gravitationsfeld $\nabla\varphi(x)$ her, so dass ein Massenpunkt der Masse m am Ort y die Kraft $-m\,\nabla\varphi(y)$ erfährt. Im einfachsten Fall ist die Massenverteilung auf einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ konzentriert, und man schreibt $\rho = \delta_{x_0} = \delta(\cdot - x_0)$ mit Hilfe der Dirac-Funktion oder δ-Distribution δ. Die Gleichung

$$\Delta\varphi = 4\pi g\, \delta_{x_0},$$

d.h. insbesondere

$$\Delta\varphi(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{x_0\}\,,$$

besitzt – bis auf die multiplikative Konstante $-g$ – das Newton-Potential

$$\varphi(x) = \frac{1}{|x - x_0|}$$

als Lösung.

(2) Ein analoges Problem liegt in der Elektrostatik vor. Für eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(x)$ ist die elektrostatische Kraft $f(y)$ gesucht, die diese Ladungsverteilung auf ein Teilchen mit Ladung q am Ort y ausübt. Dazu bestimmt man das Coulomb-Potential φ (im Vakuum) durch

$$-\Delta\varphi = 4\pi\rho$$

und erhält $f(y) = -q\,\nabla\varphi(y)$.

(3) Ein dreidimensionaler Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ habe nach (unendlich) langer Zeit eine stationäre Wärmeverteilung angenommen. Unter der Annahme des Fourier'schen Gesetzes

$$\phi(x) = -k\,\nabla\theta(x)$$

(vgl. Beispiel 1.4) erhält man die partielle Differentialgleichung

$$-\operatorname{div}(k\,\nabla\theta) = 0 \quad \text{in } \Omega\,,$$

falls keine äußeren Wärmequellen vorliegen. Ist der Körper homogen und folglich k konstant, entsteht die *Laplace-Gleichung*

$$\boxed{-\Delta\theta = 0 \quad \text{in } \Omega\,.} \tag{1.18}$$

Um eine sinnvolle Aussage zur Lösbarkeit von (1.18) zu treffen, sind aus mathematischen und physikalischen Gründen *Randbedingungen* an θ auf $\partial\Omega$ zu stellen. Wird die Temperatur θ außen konstant auf θ_0 gehalten, spricht man von *Dirichlet-Randwerten* (auch *Randbedingung 1. Art* oder *wesentliche Randbedingung*). Es ensteht das sog. *Dirichlet-Problem*

$$\boxed{\begin{array}{rcll} -\Delta\theta & = & 0 & \text{in } \Omega\,, \\ \theta & = & \theta_0 & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{array}} \tag{1.19}$$

Ist dagegen der Körper thermisch perfekt isoliert, findet kein Wärmefluss durch den Rand statt; es gilt also

$$\phi \cdot N = -k\,\frac{\partial\theta}{\partial N} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Diese Randbedingung heißt *Neumann-Randbedingung*, *natürliche Randbedingung* oder auch *Randbedingung 2. Art*. Statt (1.19) lautet das *Neumann-Problem* also

$$\boxed{\begin{array}{rcll} -\Delta\theta & = & 0 & \text{in } \Omega\,, \\ \frac{\partial\theta}{\partial N} & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{array}} \tag{1.20}$$

In einem realen, nicht perfekt isolierten Körper wird der Wärmefluss $\phi \cdot N$ auf $\partial\Omega$ proportional zur anliegenden Temperaturdifferenz $\theta - \theta_0$ sein. Folglich wird (1.18) durch die *Randbedingung der 3. Art* (*Robin-Randbedingung*)

$$\frac{\partial\theta}{\partial N} + \alpha(\theta - \theta_0) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

ergänzt. Die konstante oder von x abhängige Funktion α ist dabei aus physikalischen Gründen positiv.

Bemerkung 1.8 Die Laplace-Gleichung (1.18) macht deutlich, dass partielle Differentialgleichungen – wie auch gewöhnliche Differentialgleichungen – Randwerte und bei instationären Problemen zusätzlich Anfangswerte benötigen, um sinnvolle Aussagen zu Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu gewinnen. Der Einfachheit halber wurde dieser Punkt in den Beispielen 1.2 – 1.6 nicht angesprochen. Darüber hinaus sollte die Lösung stetig von den Daten des Problems abhängen. Dieser Problemkreis führte J. Hadamard (1865–1963) auf den Begriff der Wohlgestelltheit.

Definition 1.9 Eine partielle Differentialgleichung in $(0,T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mit rechter Seite f, kurz $L(u) = f$, mit Randwerten $R(u) = g$ auf $\partial\Omega$ und ggf. Anfangswert $A(u) = u_0$ in $t = 0$ heißt *wohlgestellt im Sinne von Hadamard*, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

(1) Für alle (sinnvollen) Daten f, u_0, g besitzt die Gleichung

$$L(u) = f \quad \text{mit } R(u) = g,\ A(u) = u_0$$

mindestens eine Lösung u (**Existenz**).

(2) Zu jedem f, g und u_0 gibt es höchstens eine Lösung (**Eindeutigkeit**).

(3) Die Lösung $u = u(f, g, u_0)$ hängt stetig von den Daten f, g, u_0 ab, d.h., werden die Daten nur wenig gestört, ändert sich auch die Lösung nur wenig (**stetige Abhängigkeit, Stabilität**)

Die Forderungen (1) – (3) hängen entscheidend davon ab, in welchen Funktionenräumen die Daten f, g, u_0 und die Lösung u gefunden und abgeschätzt werden sollen. Zur Untersuchung bieten sich Funktionenräume stetiger und mehrmals stetig differenzierbarer Funktionen wie $C^0(\overline{\Omega})$, $C^k(\overline{\Omega})$ etc., aber auch Räume integrierbarer Funktionen wie $L^1(\Omega)$ und $L^2(\Omega)$ an.

Beispiel 1.10 (1) Die Transportgleichung $u_t + cu_x = 0$ besitzt zum Anfangswert $u(0, x) = u_0(x)$ die eindeutige Lösung

$$u(t, x) = u_0(x - ct)\,.$$

Zum Nachweis der Wohlgestelltheit dieses Problems benutzen wir für u_0 den Raum der beschränkten C^1-Funktionen

$$BC^1(\mathbb{R}) = \{u_0 \in C^1(\mathbb{R}) :\ u_0, u_0' \text{ sind beschränkt}\}$$

mit der passenden Supremumsnorm

$$\|u_0\|_* = \max\{\|u_0\|_\infty,\ \|u_0'\|_\infty\}\,;$$

dabei ist $\|u_0\|_\infty := \{\sup |u_0(x)| :\ x \in \mathbb{R}\}$. Analog sei $BC^1(\mathbb{R}^2)$ mit Hilfe der Norm

$$\|u\|_{**} = \max(\,\|u\|_\infty,\ \|\partial_1 u\|_\infty, \|\partial_2 u\|_\infty)$$

definiert. Die triviale Abschätzung

$$\|u\|_{**} \leq \max(1, |c|)\, \|u_0\|_*$$

beweist dann auf Grund der Linearität der Transportgleichung die stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert: Sind u_0 und u_0' zwei Anfangswerte und u bzw. u' die zugehörigen Lösungen, so folgt

$$\|u - u'\|_{**} \leq \max(1, |c|)\, \|u_0 - u_0'\|_*.$$

(2) Jetzt werde die Transportgleichung mit der „Anfangsbedingung“

$$u(s, cs) = u_0(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

auf der sog. charakteristischen Kurve (s, cs) betrachtet. Man sieht sofort, dass die Gleichung $u_t + cu_x = 0$ nur lösbar ist, falls $u_0(s)$ konstant ist. Darüber hinaus gibt es unter dieser Voraussetzung unendlich viele Lösungen. Das Problem ist also nicht wohlgestellt!

Der Grund für den eklatanten Unterschied zwischen (1) und (2) wird in §4 bei der Behandlung der Charakteristikenmethode für quasilineare Gleichungen 1. Ordnung klar.