Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

29. Mai 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
9. Übung

Gruppenübungen

G 1 Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = |x|^{-\alpha} \chi_{B_1(0)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

mit der charakteristischen Funktion

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $0 < \alpha < n$. Für welche $1 < p < \infty$ ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$?

G 2 Berechnen Sie die folgenden Fourier-Transformierten $\hat{f}$ von f:

1. $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$,
   und zeigen Sie $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \backslash L^1(\mathbb{R})$.
2. $f(x) = e^{-|x|}$.
3. $f(x) = e^{-x^2/2}$, indem Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung für $\hat{f}(\xi)$ bzgl. ξ mit Anfangswert $\hat{f}(0) = 1$ aufstellen.

G 3 Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{R}^n, 0 \neq \beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Ist $g(x) = f(x)e^{ix\cdot\alpha}$, so ist $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha)$,
2. ist $g(x) = f(x - \alpha)$, so ist $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-i\alpha\cdot\xi}$,
3. ist $g(x) = f(\frac{1}{\beta}x)$, so ist $\hat{g}(\xi) = |\beta|^n \hat{f}(\beta\xi)$,
4. ist $g(x) = \overline{f(-x)}$, so ist $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$.

Hausübungen

H 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Faltungsintegrale $f * f$ und $f * f * f$ für

$$f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$$

und skizzieren Sie die Funktionen.

H 2 (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden L^2-Fourier-Transformierten $\hat{f}$ von f bzw. das Integral.

1. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
2. $f(x) = \frac{\sin ax}{x}$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\xi \cdot \sin b\xi}{\xi^2}\, \mathrm{d}\xi$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe G2. Verwenden Sie in 3. die Parseval-Identität.

H 3 (5 Punkte)

1. Berechnen Sie die Fourier-Transformation von

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f, &\quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^n \\ \operatorname{rot} f, &\quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^3 \\ p(\nabla) f &= \Sigma_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha f \end{aligned}$$

   für ein Polynom $p(y) = \Sigma_{|\alpha| \leq m} a_\alpha y^\alpha$ auf $\mathbb{R}^n$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. Lösen Sie *rein formal* im Fourier-Raum die Stokes-Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p &= f \quad \text{im} \quad \mathbb{R}^n \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{im} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

   für ein gegebenes Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, d.h., schreiben Sie die Lösung (u, p) in der Form

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}(...), \quad p(x) = \mathcal{F}^{-1}(...).$$