Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22. Mai 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
8. Übung

Gruppenübungen

G 1 Lösen Sie die Laplace-Gleichung $-\Delta u = 0$ im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Randbedingungen:

1. $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 1$ auf $\partial\Omega$
2. $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{B_1}, \quad u(x_1, x_2) = x_1$ auf $\partial\Omega, \quad u$ beschränkt
3. $\Omega = \mathbb{R}^2_+, \quad u(x_1, 0) = \frac{x_1}{x_1^2+1}$ auf $\partial\Omega, \quad u$ beschränkt
4. $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{B_1}, \quad u(x_1, x_2, x_3) = x_1$ auf $\partial\Omega, \quad u \to 0$ in ∞
5. $\Omega = \mathbb{R}^3_+, \quad u(x_1, x_2, 0) = \frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+1)^{3/2}}$ auf $\partial\Omega, \quad u \to 0$ in ∞.

Hinweis: Verwenden Sie in 3. eine Transformation auf die Einheitskugel und verwenden Sie 3. für 5.

G 2 Bestimmen Sie die Greensche Funktion zum Dirichlet-Problem der Laplace-Gleichung für die Halbkugel B_+ im $\mathbb{R}^n$, $B_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) \in B_1 : x_n > 0\}$.

G 3 Das *schwache Maximumprinzip in unbeschränkten Gebieten* lautet:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \neq \mathbb{R}^n$, ein unbeschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Ist $n \geq 2$ und u subharmonisch, gilt

$$\sup_\Omega u = \max\{\sup_{\partial\Omega} u, \limsup_{|x|\to\infty} u(x)\}.$$

Beweisen Sie die Folgerung:
Ist $n = 2$ und u nach oben beschränkt und subharmonisch, gilt

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Hilfsfunktion $u_\varepsilon(x) := u(x) - \varepsilon \log(C\,|x - x_0|)$, wobei $C > 0$ konstant und $x_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$ so gewählt sind, dass $C\mathrm{dist}(x_0, \Omega) \geq 1$.

Hausübungen

H 1 (5 Punkte)

Geben Sie die Greensche Funktion zum Dirichlet-Problem der Laplace-Gleichung für die folgenden zweidimensionalen Gebiete an:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : 0 < \arg z < \alpha\} \\ \Omega_2 &= \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}. \end{aligned}$$

H 2 (5 Punkte)

1. Finden Sie eine beschränkte Lösung u des Dirichlet-Problems auf dem Halbraum $\mathbb{R}^2_+$ mit der unstetigen Randbedingung
$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \textit{für } x > 0, \\ \pi & \textit{für } x < 0. \end{cases}$$
Hinweis: Aufgabe (H2), Übungsblatt 1.
2. Lösen Sie das Dirichlet-Problem auf $\mathbb{R}^2_+$ mit der unstetigen Randbedingung
$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ 1 & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

H 3 (Zusatzaufgabe: 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \dot{B}_1 = B_1\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 3,$$

mit den Randwerten $u = 0$ auf $\partial B_1, u(0) = 1$ *nicht* in $C^0(\overline{B_1}) \cap C^2(\dot{B}_1)$ lösbar ist.
Hinweis: Maximumprinzip, $u \pm \varepsilon\,|x|^{2-n}$.