Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

15. Mai 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
7. Übung

Gruppenübungen

G 1 Zeigen Sie:

1. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch. Dann gilt $u \equiv 0$.
   Hier bedeutet $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dass u^2 auf $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist, also $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty$. Die Norm von u in $L^2(\mathbb{R}^n)$ sei dabei $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x)^{1/2}$.
   Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Für zwei Funktionen $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt
   $$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)v(x)| \, \mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$
2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$ auf Ω beschränkt und harmonisch. Dann gilt für jedes $x \in \Omega$
   $$|\nabla u(x)| \leq \frac{n \|u\|_\infty}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)},$$
   wobei $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \inf\{|x-y| \,:\, y \in \partial\Omega\}$ den Abstand zwischen der Menge $\partial\Omega$ und dem Punkt x bezeichnet.
3. Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ beschränkt und harmonisch, so ist u konstant.

G 2

1. Die Greensche Funktion G zum Neumann-Problem von $-\Delta$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ muss die Bedingung $\frac{\partial}{\partial N_y} G(x,y) = 0$ statt $G(x,y) = 0$ für $x \in \Omega, y \in \partial\Omega$ erfüllen. Geben Sie G für den Halbraum $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ an.
2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glattberandetes Gebiet. Zeigen Sie, dass das inhomogene Neumann-Problem
   $$\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$
   zur Lösbarkeit die Kompatibilitätsbedingung
   $$\int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$
   erfüllen muss. Wie lautet diese Bedingung, falls $\frac{\partial u}{\partial N} = h$ auf $\partial\Omega$ vorgeschrieben wird?

G 3 (Kelvin-Transformation)

Zeigen Sie:

1. Aus $-\Delta u = f$ folgt für $v(x) = |x|^{2-n} u(\frac{x}{|x|^2})$ im $\mathbb{R}^n$
   $$-\Delta v(x) = |x|^{-2-n} f(\frac{x}{|x|^2}).$$
2. Die Transformation $x \to \frac{x}{|x|^2}$ bildet $B_1(0, ..., 0, 1)$ bijektiv auf den Halbraum $\{y = (y', y_n) \,:\, y_n > \frac{1}{2}\}$ ab.

Hausübungen

H 1 (5 Punkte)

1. Bestimmen Sie die Fundamentallösung E für $-\Delta = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ in $\mathbb{R}$. Das heißt $E \in C^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, $-E''(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und für alle Funktionen $u \in C^2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger gilt die Greensche Formel

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}} E(x-y)u''(y)\,\mathrm{d}y.$$

2. Bestimmen Sie die eindimensionale Greensche Funktion für das Intervall $(0; l)$. Die drei definierenden Eigenschaften lauten in diesem Fall
   (a) G löst $G''(x, x_0) = 0$ für $x \neq x_0$,
   (b) $G(0, x_0) = G(l, x_0) = 0$,
   (c) $G(x, x_0)$ ist in x_0 stetig und $G(x, x_0) + \frac{1}{2}|x - x_0|$ ist harmonisch in x_0.

H 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Greenschen Funktion eine Lösung für das Dirichlet-Problem im Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ mit Randwert $u(x, 0) = 1$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Identität

$$\omega_{n-1}\int_0^\infty \frac{t^{n-2}}{(1+t^2)^{n/2}}\,\mathrm{d}t = \omega_{n-1}\int_0^1 \frac{r^{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r = \frac{\omega_n}{2}$$

mit Hilfe der Substitution $r = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

H 3 (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ein beschränktes, glattberandetes Gebiet und sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit der Fundamentallösung

$$E_\lambda(x) = \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\,|x|)}{4\pi\,|x|}$$

von $(-\Delta - \lambda)u = 0$ die Gültigkeit der Greenschen Formel. Ersetzen Sie dabei auch in der Greenschen Formel $-\Delta$ durch $-\Delta - \lambda$.