Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

8. Mai 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
6. Übung

Gruppenübungen

G 1

1. Überprüfen Sie die Gültigkeit des starken Maximum-Prinzips für die harmonische Funktion
$$u(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2}$$
auf der Kreisscheibe $B_1(0)$.
2. Lösen Sie für $0 < a < b$ und Konstanten A, B die $3D$-Laplace-Gleichung
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \textit{in } B_b(0)\backslash B_a(0), \\ u &= A \quad \textit{auf } \partial B_a(0), \\ u &= B \quad \textit{auf } \partial B_b(0). \end{aligned}$$

G 2 Lösen Sie für $0 < a < b$ das $2D$-Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \textit{in } B_b(0)\backslash B_a(0), \\ u &= 0 \quad \textit{auf } \partial B_b(0) \textit{ und } \partial B_a(0). \end{aligned}$$

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die radialsymmetrischen Lösungen der Poisson-Gleichung.

G 3 Zeigen Sie, dass die Lösungen der *biharmonischen Gleichung* $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0$ *keinem* Minimum- oder Maximumprinzip genügen.

Hausübungen

H 1 (3+2 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Gleichung $(-\Delta - \lambda)u = 0$ in Ω mit $\lambda < 0$. Dann gilt
$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| \,.$$
Insbesondere folgt aus $u = 0$ auf $\partial\Omega$ sogar $u \equiv 0$.
2. Für geeignete $\lambda > 0$ (Eigenwerte) gibt es nichttriviale Lösungen (Eigenfunktionen) der Gleichung
$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in} \quad B_1(0) \subset \mathbb{R}^3, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial B_1(0).$$
Hinweis: Übung 5, (H1)

H 2 (4 Punkte)

Lösen Sie für $0 < a < b$ das $3D$-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \textit{in } B_b(0)\backslash B_a(0), \\ u &= 0 \quad \textit{auf } \partial B_a(0), \\ u_r &= 0 \quad \textit{auf } \partial B_b(0). \end{aligned}$$

H 3 (3+3 Punkte)

1. Beweisen Sie den Einschließungssatz:
Für Daten $f \in C^0(\Omega), g \in C^0(\partial\Omega)$ und Funktionen $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gelte
$$-\Delta v \leq f \leq -\Delta w \quad in \quad \Omega, \quad v \leq g \leq w \quad auf \quad \partial\Omega.$$
Dann genügt jede Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des Randwertproblems
$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \quad u = g \quad in \quad \partial\Omega$$
der Ungleichung
$$v \leq u \leq w \quad in \quad \Omega.$$
Hinweis: Beweisen Sie zuerst den Vergleichssatz:
Für Funktionen $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gelte
$$-\Delta v \leq -\Delta w \quad in \quad \Omega, \quad v \leq w \quad auf \quad \partial\Omega.$$
Dann gilt $v \leq w$ in Ω.

2. Beweisen Sie den Eindeutigkeitssatz:
Die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ in Ω mit Robin-Randbedingungen
$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha u = g$$
besitzt für $f \in C^0(\Omega), g \in C^0(\Omega)$ und für $\alpha \leq 0 \in C^0(\partial\Omega)$ höchstens eine Lösung. Mit Neumann-Randbedingungen, $\alpha = 0$,
$$\frac{\partial u}{\partial N} = g$$
ist die Lösung bis auf Konstanten eindeutig bestimmt.