Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Mai 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
5. Übung

Gruppenübungen

G 1 Lösen Sie die folgende Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= e^{-t}, \\ u(0) &= x_1, \\ u_t(0) &= x_2 x_3. \end{cases}$$

G 2 Zeigen Sie, dass die Lösung der homogenen $3D$-Wellengleichung für Anfangswerte mit kompaktem Träger, also $\operatorname{supp} u_0 \cup \operatorname{supp} u_1 \subset B_r(0)$, für beliebiges x und große $t > 0$ der folgenden Abschätzung genügt:

$$|u(t,x)| \leq \frac{M}{t^2}(t\,\|u_1\|_\infty + \|u_0\|_\infty + ct\,\|\nabla u_0\|_\infty),$$

wobei M durch Cr^2 beschränkt ist. Unterscheiden Sie für die Abschätzung von M die Fälle $x \in B_r(0)$ und $x \notin B_r(0)$ zu verschiedenen Zeitpunkten.

G 3 Es sei $A = (a_{ij})$ eine symmetrische, positiv definite $n \times n$ - Matrix. Transformieren Sie die Gleichung

$$-\Sigma_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_i\partial_j u = 0$$

in eine Laplace-Gleichung.

Hausübungen

H 1 (5 Punkte)

Finden Sie alle radialsymmetrischen Lösungen der Gleichungen $(-\Delta - \lambda)u = 0$ im $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. (Ansatz: $u(r) = \frac{v(r)}{r}$).

H 2 (5 Punkte)

Beweisen Sie die Lösungsformel

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B_{ct}(x)} (tu_1(y) + u_0(y) + (y-x)\cdot\nabla u_0(y))\,\mathrm{d}o_y$$

für die $3D$-Wellengleichung.

H 3 (5 Punkte)

Geben Sie Lösungen der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(x,y) = p(x,y)$$

im $\mathbb{R}^2$ für alle Polynome p vom Grad 2 oder niedriger an.