Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24. April 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
4. Übung

Gruppenübungen

G 1 Geben Sie für Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$ eine Lösung der 2-dimensionalen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0, \\ u(0) &= A, \\ u_t(0) &= B. \end{cases}$$

an.

G 2 Lösen Sie die folgende Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0, \\ u(0) &= |x|^2, \\ u_t(0) &= x_3. \end{cases}$$

G 3

1. Lösen Sie die eindimensionale gedämpfte Wellengleichung

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{rr} - \frac{2}{r} v_r &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \times (-1,1), \\ v(t, \pm 1) &= 0, \\ v(0) &= 0, \\ v_t(0) &= \cos(\frac{\pi}{2} r). \end{cases}$$

Hinweis: Leiten Sie eine Gleichung für $w = rv$ her.

2. Sei $v(t,r)$ die Lösung aus dem ersten Teil. Zeigen Sie, dass $u(t,|r|) = v(t,r), -1 < r < 1$, eine *radialsymmetrische* Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \times B, \\ u(0) &= 0, \\ u_t(0) &= \cos(\frac{\pi}{2}|x|), \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R} \times \partial B \end{cases}$$

in der Einheitskugel $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ ist. Diese Gleichung beschreibt interne Vibrationen einer fest eingespannten, elastischen Kugel. Zeigen Sie insbesondere, dass $u(t,0) = t\cos(\frac{\pi}{2}t)$.

Hausübungen

H 1 (6 Punkte)

1. Man beweise, dass alle radialsymmetrischen Lösungen der Wellengleichung $u_{tt} - c^2\Delta u{=}0$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ die Gestalt
$$u(t,x) = \frac{F(r-ct) + G(r+ct)}{r}, \qquad r = |x|\,,$$
haben.
Hinweis: Aufgabe **G 3**.
2. Für den unstetigen Anfangswert
$$u(0) = 0, \quad u_t(0) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & r < 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{array} \right., \qquad r = |x|\,,$$
löse man die homogene Wellengleichung ($c = 1$) in $\mathbb{R}^3$. Man zeige, dass die Lösung in $t = 1$ unstetig wird.

H 2 (6 Punkte)

Sei $\Delta_n = \Sigma_{i=1}^n \partial_i^2$ der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^n$, und seien $k > 0, c > 0$.

1. Zeigen Sie: Falls $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ die Gleichung
$$u_{tt} - c^2\Delta_n u = -k^2 u$$
löst, ist
$$v(t,x,x_{n+1}) = \left[A\cos(\frac{k}{c}x_{n+1}) + B\sin(\frac{k}{c}x_{n+1}) \right] u(t,x)$$
eine Lösung von $v_{tt} - c^2\Delta_{n+1}v = 0$. Wie ist dieser Ansatz zu verändern, wenn $-k^2$ durch k^2 ersetzt wird?
2. Man beweise die Existenz einer Lösung der $2D$-Gleichung
$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_{tt} - c^2\Delta_2 u &=& \pm k^2 u & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \\ u(0) &=& u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2), & \\ u_t(0) &=& u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2). & \end{array} \right.$$

H 3 (4 Punkte)

Es seien $\rho \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ eine Funktion und $u \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld, sodass die Gleichungen
$$u_t + \nabla\rho = 0, \qquad \operatorname{div} u + c^2\rho_t = 0$$
erfüllt sind. Zeigen Sie, dass ρ und u jeweils einer Wellengleichung, bzw. einer Gleichung von ähnlicher Gestalt wie die Wellengleichung, genügen. Beweisen Sie dann, dass $\operatorname{div} u$ eine Wellengleichung erfüllt.