Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17. April 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
3. Übung

Gruppenübungen

G 1 Lösen Sie die inhomogene Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= x^2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) &= x \quad \text{auf } \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}. \end{cases}$$

G 2 Zeigen Sie: Sei $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für das sphärische Mittel $M_h(x,r)$

$$M_h \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \partial_i M_h = M_{\partial_i h}$$

für jede Ortsableitung 1. Ordnung $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$.

G 3 Lösen Sie für $l > 0, u_0 \in C^2(0,l), u_1 \in C^1(0,l)$ das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times (0,l), \\ u(0,x) &= u_0 \quad x \in (0,l), \\ u_t(0,x) &= u_1 \quad x \in (0,l), \\ u(t,0) = u(t,l) &= 0 \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

unter den Kompatibilitätsbedingungen $u_0(0) = u_0(l) = 0, u_1(0) = u_1(l) = 0$, indem Sie u_0 und u_1 erst geeignet auf $(-l,0)$ und $(l,2l)$ und dann auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. Welche weiteren Kompatibilitätsbedingungen müssen erfüllt sein, damit $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,l))$ ist?

Hausübungen

H 1 (5 Punkte)

Man betrachte glatte Lösungen der Wellengleichung $u_{tt} - c^2 \Delta u = f$ in einem glattberandeten, beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Es bezeichne

$$E(t) = \int_\Omega (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2)\,\mathrm{d}x$$

die Gesamtenergie zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Ist $f = 0$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$, so ist $E(t)$ konstant.
2. Für beliebiges f und beliebige Anfangswerte besitzt die Wellengleichung *höchstens* eine Lösung.

H 2 (5 Punkte)

1. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechnen Sie Δu in Polarkoordinaten.
2. Berechnen Sie entsprechend Δu in Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$, wenn $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ nur vom euklidischen Betrag $|(x_1, x_2, x_3)^T|$ abhängt.

H 3 (5 Punkte)

Lösen Sie das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - 3u_{tx} - 4u_{xx} &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) &= x^2 \quad \text{auf } \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= e^x \quad \text{auf } \mathbb{R}, \end{cases}$$

indem Sie analog wie bei der Herleitung der Lösung der Wellengleichung vorgehen.