Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. April 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
2. Übung

Gruppenübungen

G 1

1. Bestimmen und skizzieren (!) Sie die Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$ mit Anfangswert $u(0) = e^{-|x|}, u_t(0) = 0$.
2. Zeigen Sie, dass die homogene Wellengleichung wohlgestellt ist, also, dass für die Lösungen u, v zu verschiedenen Anfangswerten $u_0 \in BC^2(\mathbb{R}), u_1 \in BC^1(\mathbb{R})$ und $v_0 \in BC^2(\mathbb{R}), v_1 \in BC^1(\mathbb{R})$ gilt

$$\|u - v\|_{BC^2} \leq C(\|u_0 - v_0\|_{BC^2} + \|u_1 - v_1\|_{BC^1}).$$

G 2 Für $h \in C^0(\mathbb{R})$ bezeichnge M_h den Mittelungsoperator

$$M_h(x, r) = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} h(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R},\ r > 0.$$

Man zeige, dass die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2, \\ u(0) &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}, \\ u_t(0) &= u_1 \quad \text{auf } \mathbb{R}, \end{cases}$$

in der Form

$$u(t, x) = tM_{u_1}(x, ct) + \frac{\partial}{\partial_t}(tM_{u_0}(x, ct))$$

geschrieben werden kann.

G 3 Sei u eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. Man zeige, dass u in den Eckpunkten A, B, C, D eines *charakteristischen Parallelogramms,* der Gleichung $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$ genügt.

Hausübungen

H 1 (6 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Wellengleichung auf der Halbgeraden für inhomogene Anfangs- und Randwerte gelöst werden. Verwenden Sie dazu geeignete Fortsetzungen der Funktionen u_0, u_1 und h.

1. Lösen Sie die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 & \text{für } x > 0, t > 0, \\ u(0,x) &= u_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_t(0,x) &= u_1(x) & \text{für } x > 0, \\ u(t,0) &= 0 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

auf der Halbgeraden explizit durch eine Lösungsformel. Dabei gelte $u_0 \in C^2([0,\infty)), u_1 \in C^1([0,\infty))$ sowie

$$u_0(0) = 0, \quad , u_1(0) = 0, \quad u_0^{''}(0) = 0.$$

2. Geben Sei eine spezielle Lösung im Falle inhomogener Randwerte

$$u(t,0) = h(t) \quad \text{für } t > 0$$

und homogener Anfangswerte $u_0 = u_1 = 0$ unter der Kompatibilitätsbedingung $h(0) = h^{'}(0) = h^{''}(0) = 0$ an. Was passiert im Fall $h(t) = a + bt + dt^2$?

3. Zeigen Sie die Existenz einer Lösung der Wellengleichung auf der Halbgeraden mit inhomogenen Anfangs- und Randwerten unter geeigneten Kompatibilitätsbedingungen.

H 2 (4 Punkte)

Man gebe eine Lösung der modifizierten Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= u & \text{auf } \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) &= e^x & \text{auf } \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= 0 & \text{auf } \mathbb{R}, \end{cases}$$

mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung nach t an.

H 3 (6 Punkte)

Zur numerischen Approximation der Konvektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$, $u(0,x) = u_0(x)$, werde das Verfahren

$$\frac{v(t+k,x) - v(t,x)}{k} + c\frac{v(t,x+h) - v(t,x)}{h} = 0$$

mit Zeitschrittweite $k > 0$ und Ortsschrittweite $h > 0$ vorgeschlagen. Es sei $\lambda = \frac{k}{h}$ und E der Shift-Operator

$$Ef(x) = f(x+h).$$

1. Für $t = nk$ leite man eine Formel für $v(t,x)$ in Abhängigkeit vom Anfangswert u_0 her. Wie sieht das Abhängigkeitsgebiet $A(t,x)$ der numerischen Approximation v in (t,x) aus? Was ist das Abhängigkeitsgebiet der analytischen Lösung u?
Hinweis: $v(\tau + k, x) = ((1 + \lambda c) - \lambda c E)v(\tau, x)$ für alle x, τ.

2. Man zeige, dass ein Fehler der Größe ε in u_0, d.h. $\|u_0\|_\infty \leq \varepsilon$, zu einem Fehler der Größe $(1 + 2\lambda c)^n \varepsilon$ in $v(t,x)$, $t = nk$, führen kann (Instabilität).

3. Wiederholen Sie die Analysis aus 1. für das Verfahren mit Rückwärtsdifferenzen

$$\frac{v(t+k,x) - v(t,x)}{k} + c\frac{v(t,x) - v(t,x-h)}{h} = 0$$

unter der *Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung* $\lambda c \leq 1$.
Zeigen Sie $\|v\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ (Stabilität). Zeigen Sie, dass der analytische Abhängigkeitsbereich jetzt im numerischen "enthalten" ist. Tatsächlich läßt sich die Konvergenz dieses Verfahrens unter der Voraussetzung $u_0 \in C_b^2(\mathbb{R})$ beweisen.