Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Juli 2008

# Elementare partielle Differentialgleichungen
## 14. Übung

## Gruppenübungen

**G 1** Nennen Sie Beispiele für partielle Differentialgleichungen, die in der Vorlesung behandelt wurden, die eine eindeutige Lösung besitzen und für solche, die nicht eindeutig lösbar sind.

**G 2** Beweisen Sie das *Dirichlet'sche Prinzip* auf der Kreisscheibe $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$:
Es seien $g \in C^0(\partial B_1)$ und $u$ die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } B_1, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial B_1. \end{aligned}$$

Die *Energie* einer Funktion $v \in C^1(B_1)$ sei definiert durch

$$E[v] = \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla v(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Dann gilt für alle $w \in C^1(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$ mit $w|_{\partial B_1} = g$ die Ungleichung $E[u] \leq E[w]$, die harmonischen Funktionen minimieren also die Energie.

**G 3** Beim Separationsansatz treten häufig Differentialgleichungen als Eigenwertprobleme in der Form

$$\begin{aligned} (py')' + qy &= \lambda y \quad \text{in } (a, b), \\ y(a) = y(b) &= 0, \end{aligned}$$

auf. Zeigen Sie, dass Lösungen $y_\mu, y_\lambda$ zu zwei verschiedenen Eigenwerten $\mu, \lambda$ im $L^2$- Skalarprodukt orthogonal sind, also $\int_a^b y_\lambda y_\mu = 0$.