Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26. Juni 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
13. Übung

Gruppenübungen

G 1 Berechnen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes eine Lösung für die Wärmeleitungsgleichung mit gemischten Randbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \kappa u_{xx} &= 0 \quad \text{in} \quad (0,\infty)\times(0,\pi), \\ u(0) &= f \quad \text{in} \quad (0,\pi), \\ u(t,0) &= 0, \\ u_x(t,\pi) &= 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie für $f(x) = x$ die Koeffizienten der Reihe mit Hilfe der verallgemeinerten Fourierkoeffizienten von f.

G 2 Lösen Sie die folgende inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit dem Ansatz der Trennung der Variablen.

$$\begin{cases} u_t - \kappa u_{xx} &= f \quad \text{in} \quad (0,\infty)\times(0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0, \\ u(0,\cdot) &= \varphi. \end{cases}$$

Hinweis: Entwickeln Sie $f(t)$ und φ in Fourierreihen, um eine Lösung der Form $u(t,x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi x$ zu bestimmen.

G 3 Zeigen Sie, dass die aus dem Separationsansatz berechnete formale Lösung des Dirichlet-Problems auf der Kreisscheibe mit Radius 1 (Beispiel 6.2) mit der eindeutigen Lösung übereinstimmt, die sich mit Hilfe des *Poisson-Kerns* ergibt (Korollar 4.32):

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(\varphi-\theta)+1} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Hausübungen

H 1 (Zusatzaufgabe: 5 Punkte)

Lösen Sie die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= A\sin(\omega t) \quad \text{in} \quad (0,\infty)\times(0,l1), \\ u(t,0) = u(t,l) &= 0, \\ u(0,\cdot) &= 0 \\ u_t(0,\cdot) &= 0. \end{cases}$$

Für welche ω wächst die Lösung in der Zeit an (Resonanzfall)?