Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19. Juni 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
12. Übung

Gruppenübungen

G 1 (Fourierkoeffizienten)

Für eine Funktion $f \in L^1(-\pi,\pi)$ seien die Fourierkoeffizienten gegeben durch

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t, && n \in \mathbb{Z}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t, && n \geq 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t, && n \geq 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. Ist f stetig differenzierbar und gilt für die stetige Fortsetzung auf $\pi, -\pi$, dass $f(-\pi) = f(\pi)$, dann ist $c_n(f') = inc_n(f)$.
2. $c_n(f_a) = e^{ina}c_n(f)$, wobei $f_a(t) = f(t+a)$ und f 2π-periodisch.
3. Ist f gerade, dann gilt $b_n(f) = 0$,
   ist f ungerade, dann gilt $a_n(f) = 0$.

G 2 Finden Sie mit Hilfe der Trennung der Variablen eine Lösung für das Dirichlet-Problem auf dem Kreissektor Ω zum Radius 1 mit Öffnungswinkel $\alpha \in (0, 2\pi)$, in Polarkoordinaten $\Omega = \{(x,y) : 0 < \varphi(x,y) < \alpha, 0 \leq r(x,y) < 1\}$, mit

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \cap \partial B_1(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \backslash \partial B_1(0). \end{cases}$$

Dabei sei $g = g(\varphi)$ stetig in $\varphi \in [0,\alpha]$ und $g(0) = g(\alpha) = 0$.

G 3 Lösen Sie das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega = (0,1)\times(0,1), \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $g(0,y) = g(1,y) = g(x,0) = 0$ und

1. $g(x,1) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$,
2. $g(x,1) = x^2 - x$.

Hausübungen

H 1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie eine Reihenentwicklung der Lösung für die gedämpfte Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} + r u_t &= 0 \qquad \text{für} \quad t > 0, 0 < x < l, \\ u(t,0) = u(t,l) &= 0, \\ u(0,x) &= u_0(x), \\ u_t(0,x) &= u_1(x), \end{cases}$$

wobei $0 < r < \frac{2\pi c}{l}$.

H 2 (5 Punkte)

Machen Sie den Ansatz der Trennung der Variablen für die Wärmeleitungsgleichung auf dem Quadrat $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$,

$$\begin{cases} u_t - \kappa \Delta u &= 0 \qquad \text{in} \quad (0,\infty) \times \Omega, \\ u(0) &= u_0 \qquad \text{in} \quad \Omega, \\ u(t,\cdot) &= 0 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

H 3 (5 Punkte)

Lösen Sie auf dem Kreisring $\Omega = A_{1,2} = \{(x,y) : 1 < r(x,y) < 2\}$ das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \qquad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= g \qquad \text{auf} \quad \{(x,y) : r(x,y) = 1\}, \\ u &= f \qquad \text{auf} \quad \{(x,y) : r(x,y) = 2\}. \end{cases}$$