Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12. Juni 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
11. Übung

Gruppenübungen

G 1 Finden Sie unter Zuhilfenahme der Wärmeleitungsgleichung Maximum und Minimum der Funktion $u(t,x) = 2x^3 + 12kxt - x^2 - 2kt + 1$ auf dem Rechteck $\{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$.

G 2

1. Geben Sie eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}$, $u_t - ku_{xx} = 0$, unter der Anfangsbedingung $u(0) = x^2 - x$ an.
2. Finden Sie analog eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - k\Delta u = 0$ im $\mathbb{R}^3$ mit der Anfangsbedingung $u(0) = xy^2z$.

G 3

1. Geben Sie eine reell analytische Lösung u der Wärmeleitungsgleichung auf dem Halbraum $\mathbb{R}^n_+$,

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - k\Delta u &=& 0 & \text{in} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^n_+, \\ u &=& 0 & \text{auf} \quad \partial\mathbb{R}^n_+ \\ u(0) &=& u_0, & \end{array}\right.$$

   an, wenn $u_0 \in BC^0(\mathbb{R}^n)$.
   Hinweis: Spiegelung.
2. Finden Sie auf ähnliche Weise eine formale Lösung für das Problem mit Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \qquad \text{auf} \quad \partial\mathbb{R}^n_+$$

Hausübungen

H 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie den *Vergleichssatz:*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $T > 0$. Außerdem seien $u, v \in C^0(\overline{\Omega_T})$ mit $u_t, v_t \in C^0(\overline{\Omega_T})$, $\nabla^2 u, \nabla^2 v \in C^0(\overline{\Omega_T})$ Funktionen, die den Ungleichungen

$$\begin{aligned} u_t - k\Delta u &\leq v_t - k\Delta v \qquad \text{in } \Omega_T, \\ u &\leq v \qquad \text{auf } \partial_p \Omega_T \end{aligned}$$

genügen. Dann ist $u \leq v$ auf $\overline{\Omega_T}$.

H 2 (3 Punkte)

Sei u die Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - k\Delta u = 0$ in $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ mit $u(0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie für alle $t \in (0, \infty)$, dass

$$\|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1 .$$

H 3 (6 Punkte)

1. Man löse die Wärmeleitungsgleichung $u_t - u_{xx} = 0$ auf $(0, \infty) \times (0, 1)$ mit den Anfangsrandwerten $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ und $u(0, x) = u_0(x), x \in (0, 1)$, *formal* in der Form

$$u(t, x) = \int_0^1 u_0(y) G(t, x, y) \, \mathrm{d}y$$

mit einer Green'schen Funktion $G : (0, \infty) \times (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}$. Zum Beweis werde u_0 ungerade über 0 und über 1 sowie 2-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt:

$$u_0(x) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} (U_0(x + 2k) - U_0(2 - 2k - x)) \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}$$

mit $U_0(x) = u_0(x)$ für $x \in (0, 1), U_0(x) = 0$ sonst.

2. Man zeige:
   (a) $G \in C^\infty((0, \infty) \times (0, 1) \times (0, 1))$
   (b) $G(t, x, y) = G(t, y, x)$
   (c) $G(t, y, 0) = G(t, y, 1) = 0$
   (d) $G \geq 0$ (Verwenden Sie das Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung auf $(0, 1)$).