Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Juni 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
10. Übung

Gruppenübungen

G 1 Zeigen Sie:

1. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f}$ beschränkt.
2. Für $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, d. h. $f \in C^0$, $\operatorname{supp} f$ ist kompakt, ist $\hat{f}$ stetig und es gilt $\hat{f}(\xi) \to 0$, wenn $|\xi| \to \infty$.

G 2 Beweisen Sie: Für die Lösung $u(t) = E(t)u_0$ der Wärmeleitungsgleichug aus Satz 5.16 gilt das *schwache Maximum- und Minimumprinzip*

$$\inf u_0 \le u(t,x) \le \sup u_0, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Für jeden konstanten Anfanswert ist $u \equiv u_0$, aber für jeden nicht-konstanten Anfangswert u_0 gilt sogar

$$\inf u_0 < u(t,x) < \sup u_0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt: Wenn $u(t,x) = \inf u_0$ oder $u(t,x) = \sup u_0$ in einem Punkt $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, dann ist u konstant (*starkes Maximum- und Minimumprinzip)*, s. Bemerkung 5.18 (1).

G 3 Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ im unendlichen Streifen $\mathbb{R} \times (0,1)$ mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x,0) &= e^{-2|x|}, \qquad u(x,1) = 0 \\ u(x,y) &\to 0, \qquad \textit{gleichmäßig in } y \textit{ für } |x| \to \infty. \end{aligned}$$

Hinweis: Fourier-Trafo in x.

Hausübungen

H 1 (4 Punkte)

Es seien $u_1(t,s), ..., u_n(t,s)$ n Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{ss}$. Zeigen Sie, dass

$$u(t,x) = u(t,x_1,...,x_n) = \Pi_{k=1}^n u_k(t,x_k)$$

die Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta_n u = 0$ erfüllt.

H 2 (5 Punkte)

1. Lösen Sie die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0) &= u_0 \\ u_t(0) &= u_1 \end{cases}$$

mit Anfangswerten $u_0, u_1 \in L^2(\mathbb{R})$ formal im Fourierbild.

2. Zeigen Sie, dass die in 1. gewonnene Lösung u für alle $t \in \mathbb{R}$ der Abschätzung

$$\|u(t)\|_2 \le \|u_0\|_2 + |t| \, \|u_1\|_2$$

genügt.

H 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine radialsymmetrische Funktion, so ist auch $\hat{f}$ radialsymmetrisch.
2. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ radialsymmetrisch. Dann besitzt $\hat{f}$ die Darstellung $(s = |\xi|, r = |x|)$

$$\hat{f}(\xi) = s^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty f(r) J_{\frac{n-2}{2}}(rs) r^{n/2}\, \mathrm{d}r$$

mit der Bessel-Funktion

$$J_{\frac{n-2}{2}}(t) = \frac{\omega_{n-1}}{(2\pi)^{n/2}} t^{\frac{n-2}{2}} \int_{-1}^1 e^{itu}(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}\, \mathrm{d}u,\ t > 0,$$

und dem Oberflächenmaß ω_{n-1} von $\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$.
Hinweis: In geeigneten $n-$dimensionalen Kugelkoordinaten ist $x_1 = r\cos\phi_1, \phi_1 \in (0,\pi)$; n-dimensionale Integration liefert bei von $\phi_2, ..., \phi_{n-1}$ unabhängigen Funktionen Integrale vom Typ

$$\omega_{n-1} \int_0^\infty r^{n-1} \int_0^\pi (\sin\cdot\phi_1)^{n-2} ... \mathrm{d}\phi_1 \mathrm{d}r.$$

3. Lösen Sie formal die elliptische Gleichung

$$u - \Delta u = f \qquad \text{im } \mathbb{R}^3$$

mit Hilfe der Fourier-Transformation und schreiben Sie die Lösung u als Faltungsintegral.