Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Karoline Götze

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. April 2008

Elementare partielle Differentialgleichungen
1. Übung

Gruppenübungen

G 1 Unter den Voraussetzungen $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ finde man die eindeutige Lösung der Konvektions-Reaktions-Gleichung

$$u_t + u_x = f(t,x)$$

mit Anfangswert $u(0,x) = u_0(x)$.

G 2 Sei $F \in C^0(\mathbb{R})$ und $u(t,x) = F(x-ct)$, $c \neq 0$. Man zeige, dass u *im distributionellen Sinne* eine Lösung der Konvektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$ ist, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t,x)(\varphi_t(t,x) + c\varphi_x(t,x))\, dxdt = 0$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Dabei ist

$$\begin{aligned} C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \quad = \quad & \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ unendlich oft differenzierbar,} \\ & \varphi = 0 \text{ außerhalb eines Kompaktums } K\}. \end{aligned}$$

G 3 Man zeige, dass die folgenden Gleichungen durch einfache Variablentransformation in eine Diffusionsgleichung überführt werden können.

(1) $u_t = ku_{xx} - cu_x - \lambda u \quad (u = we^{\alpha x - \beta t})$,
(2) $u_t = k(t)u_{xx} \quad (\tau = \int_0^t k(s)\, ds)$,
(3) $u_t = ku_{xx} - b(t)u_x \quad (\xi = x - \int_0^t b(s)\, ds)$.

Jacques Hadamard (1865-1963)


Hausübungen

H 1 (4 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}^n$ mit $|a| = 1$ ($|\cdot|$ =euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$) gegeben. Man finde die allgemeine Lösung der Konvektionsgleichung

$$0 = a \cdot \nabla u = \Sigma_{j=1}^n a_j \partial_j u(x).$$

Hinweis: Man ergänze $a = a^1$ zu einer Orthonormalbasis $\{a^1, a^2, ..., a^n\}$ des $\mathbb{R}^n$ und betrachte u.a. $v(a^2 \cdot x, ..., a^n \cdot x)$.

H 2 (6 Punkte)

1. Sei $f(z) = u + iv, z = x + iy$, eine holomorphe Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass u und v dann reellwertige harmonische Funktionen sind, d.h.

$$\Delta u(x,y) = \Delta v(x,y) = 0 \text{ in } G.$$

2. Man finde eine harmonische Funktion $u \neq 0$ im Sektor $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \alpha\}$ mit den Randwerten $u = 0$ auf $\partial S_\alpha \backslash \{0\}$.
   Hinweis: $f(z) = z^\beta$.
3. Ist u eine harmonische Funktion im $\mathbb{R}^n$ und U eine orthogonale Matrix, so ist auch $v(x) = u(U \cdot x)$ harmonisch.

H 3 (Zusatz - Die Definition der Wohlgestelltheit einer PDGL wird am 8.4. in der Vorlesung behandelt.)

Man zeige, dass das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \text{ in } \Omega_\varepsilon = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, \varepsilon), \\ u(\pm\frac{\pi}{2}, \cdot) &= 0, \\ u(\cdot, 0) &= 0, \\ u_y(\cdot, 0) &= u_1(\cdot), \end{aligned}$$

in *keinem* Gebiet $\Omega_\varepsilon, \varepsilon > 0$, wohlgestellt ist. (Zum Beweis sei $u_1 = e^{-\sqrt{n}} \cos nx, n \in \mathbb{N}$ ungerade, und folglich $u(x,y) = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos nx \cdot \sinh ny$.) Geben Sei ein *nicht-wohlgestelltes* Neumann-Problem an, also ein Problem mit der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial N}(\pm\frac{\pi}{2}, \cdot) = 0$.