Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Jennifer Prasiswa

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
03.07.2008

7. Übung zur „Mathematik II für Chemiker“

Da dies die letzte Übung ist, gibt es keine Hausaufgaben.
Jennifer Prasiswa bietet am 3.7. um 14.20 - 15.25 Uhr (bei Bedarf länger) im Lernzentrum Mathematik und am 7.7. von 9 -12 Uhr in S215/301 zusätzliche Sprechstunden an.

Gruppenübung

Aufgabe G21 (Richtungsableitung)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 e^{x_1 x_2}$. Berechnen sie für $x = (1, 1, 1)^T$ und $v = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, -1, 3)^T$ die Richtungsableitung $f'(x, v)$.

Lösung: $f'(x, v) = grad_f(x)v = e^{x_1 x_2}(x_1 x_2 x_3 + x_3, x_1^2 x_3, x_1)\frac{1}{\sqrt{11}}(1, -1, 3)^T = \frac{4e}{\sqrt{11}}$

Aufgabe G22 (Taylor'sche Formel)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 y + 3y - 2.$$

Entwickeln Sie f in Potenzen von $(x - 1)$ und $(y + 2)$.

Lösung: Wir bestimmen die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, -2)$.
f ist beliebig oft differenzierbar, wobei die partiellen Ableitungen ab der 4. Ordnung identisch verschwinden.
Als erstes bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xy, \quad f_y(x, y) = x^2 + 3 \\ f_{xx}(x, y) &= 2y, \quad f_{xy}(x, y) = 2x, \quad f_{yy}(x, y) = 0 \\ f_{xxx}(x, y) &= 0, \quad f_{xxy}(x, y) = 2, \quad f_{xyy}(x, y) = f_{yyy}(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Nun wenden wir den Satz über die Taylor'sche Formel (Satz 13.22) an mit $(x_0, y_0) = (1, -2)$ und $h = (x - 1, y + 2)$.
Zunächst bestimmen wir die Werte der Funktion und der partiellen Ableitungen an der Stelle $(1, -2)$:

$$\begin{aligned} f(1, -2) &= -10, \quad f_x(1, -2) = -4, \quad f_y(1, -2) = 4 \\ f_{xx}(1, -2) &= -4, \quad f_{xy}(1, -2) = 2, \quad f_{xxy}(1, -2) = 2. \end{aligned}$$

Alle anderen partiellen Ableitungen sind null.
Einsetzen in die Taylor'sche Formel ergibt:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(1+(x-1), -2+(y+2)) \\
&= -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - \frac{4}{2}(x-1)^2 + 2(x-1)\ (y+2) + 0 \cdot (y+2)^2 \\
&+ 0 \cdot (x-1)^3 + (x-1)^2\ (y+2) + 0 \cdot (x-1)\ (y+2)^2 + 0 \cdot (y+2)^3 \\
&= -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)\ (y+2) + (x-1)^2\ (y+2).
\end{aligned}$$

Aufgabe G23 (Extremstellen)

(a) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = 4 - x^2 - y^2$.
Bestimmen Sie das Extremum von h. Ist es ein Maximum oder ein Minimum?

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x-2)e^{-x+y}$.
Zeigen Sie, daß f keine Extrema besitzt.
Für welche Werte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Hesse'sche Matrix $H_f(x,y)$ positiv definit?

Lösung:

(a) Als erstes bestimmen wir die partiellen Ableitungen von h bis einschließlich 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
h_x(x,y) = -2x, \quad h_y(x,y) = -2y \\
h_{xx}(x,y) = -2 = h_{yy}(x,y), \quad h_{xy}(x,y) = 0 = h_{yx}(x,y).
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für die Existenz von Extrema ist $(\operatorname{grad} h)(x,y) = 0$. Wir lösen das zugehörige Gleichungssystem:

$$(\operatorname{grad} h)(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$$

Nun überprüfen wir die hinreichende Bedingung (Sazt 13.25):

$$h_{xx}(0,0) \cdot h_{yy}(0,0) - h_{xy}^2(0,0) = 4 > 0.$$

Also besitzt h in $(0,0)$ ein relatives Extremum.
Da $h_{xx}(0,0) = -2 < 0$ ist es ein Maximum.

(b) Als erstes bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f bis einschließlich 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) = (-x+3)e^{-x+y}, \quad f_y(x,y) = (x-2)e^{-x+y}, \quad f_{xx}(x,y) = (x-4)e^{-x+y} \\
f_{yy}(x,y) = (x-2)e^{-x+y}, \quad f_{xy}(x,y) = (-x+3)e^{-x+y} = f_{yx}(x,y).
\end{aligned}$$

$(\operatorname{grad} f)(x,y) = 0$. Es gilt:

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (-x+3)e^{-x+y} = 0 \\ (x-2)e^{-x+y} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \wedge x = 2 \qquad \text{Widerspruch!}$$

Also besitzt f keine Extrema.
Die Hesse'sche Matrix von f ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (x-4)e^{-x+y} & (-x+3)e^{-x+y} \\ (-x+3)e^{-x+y} & (x-2)e^{-x+y} \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 11.21 wissen wir, daß eine Matrix genau dann positiv definit ist, wenn alle führenden Hauptunterdeterminanten positiv sind. Damit $H_f(x,y)$ positiv definit ist, muß somit gelten:

$$\begin{aligned} (x-4)e^{-x+y} > 0 \quad &\wedge \quad (x-4)\ (x-2)e^{-2x+2y} - (-x+3)^2 e^{-2x+2y} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad x-4>0 \quad &\wedge \quad (x-4)\ (x-2) - (-x+3)^2 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad x>4 \quad &\wedge \quad x^2-6x+8-(x^2-6x+9) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad x>4 \quad &\wedge \quad -1>0 \end{aligned}$$

Also ist die Hesse'sche Matrix $H_f(x,y)$ nirgends positiv definit.

Aufgabe G24 (Extrema unter Nebenbedingung)
Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad & f(x,y) = \exp(x+2y), \\ g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad & g(x,y) = x^2+y^2-4. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$.

Lösung: Lagrange-Funktion:

$$L(r,h,\lambda) = \exp(x+2y) + \lambda(x^2+y^2-4).$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= \exp(x+2y) + 2\lambda x \overset{!}{=} 0, \\ L_y(x,y,\lambda) &= 2\exp(x+2y) + 2\lambda y \overset{!}{=} 0, \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2+y^2-4 \overset{!}{=} 0, \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $y=2x$ und mit der dritten Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad & y_1 &= \frac{4}{\sqrt{5}}, \\ x_2 &= -\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad & y_2 &= -\frac{4}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $f(x_1,y_1) = \exp(10/\sqrt{5})$ (Maximum), $f(x_2,y_2) = \exp(-10/\sqrt{5})$ (Minimum).

Aufgabe G25 (Vektorfeld und Potential)
Wir betrachten das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(i)\ \ f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1x_2^2 \\ 3x_1^2x_2 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ \ f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_2}\sin x_1 \\ e^{x_2}\cos x_1 \end{pmatrix}.$$

Besitzt f jeweils ein Potential? Gib gegebenenfalls eine Potentialfunktion φ an.

Lösung: Da $\mathbb{R}^2$ ein konvexes Gebiet ist, besitzt nach Satz 14.6 die Funktion f ein Potential genau dann wenn $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ gilt.

(i) $\partial_1 f_2 = 6x_1x_2^2$, $\partial_2 f_1 = 6x_1x_2^2$. Die Funktion f hat also ein Potential.

(ii) $\partial_1 f_2 = -e^{x_2}\sin x_1$, $r\partial_2 f_1 = e^{x_2}\sin x_1$. Die Funktion f hat also kein Potential.

Also besitzt f im ersten Fall ein Potential, d.h.

(a) $f_1(x) = \partial_1 \varphi(x)$

(b) $f_2(x) = \partial_2 \varphi(x)$.

Daraus folgt durch Integration

(a) $\varphi(x_1, x_2) = \int f_1(x_1, x_2) dx_1 + C_1(x_2) = x_1^2 x_2^3 + C_1(x_2)$

(b) $\varphi(x_1, x_2) = \int f_2(x_1, x_2) dx_2 + C_2(x_1) = x_1^2 x_2^3 + C_2(x_1)$

also gilt $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3 + C$ für $C \in \mathbb{R}$.