H 16

- für $(x,y) \neq (0,0)$

$$h_x(x,y) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^4}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$

$$h_y(x,y) = \frac{-x^3y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$

für $(x,y) = (0,0)$ sind die partiellen Ableitungen stetig, somit ist h differenzierbar in (x,y)

- für $(x,y) = (0,0)$

$$h_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t,0) - h(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t} = 0$$

$$h_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(0,t) - h(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

kanidat für die Ableitung ist also $(0,0)$

$$\frac{h(x,y) - h(0,0) - (0,0)\binom{x}{y}}{\|(x,y)\|} = \frac{x^3}{x^2+y^2} \leq x \to 0 \text{ für } (x,y) \to (0,0)$$

also ist h in $(0,0)$ differenzierbar.

- Stetigkeit:

$x_k, y_k \to 0$ für $x_k = 0$ $h(x_k, y_k) = 0$

für $x_k \neq 0$ $|h(x_k, y_k)| \leq \left|\frac{x_k^3}{x_k}\right| = |x_k^2| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

somit ist h stetig in $(0,0)$.

Für alle anderen Punkte ist die Stetigkeit klar.

H17

a) $$J_f = \begin{pmatrix} y & x \\ y \sinh(xy) & x \sinh(xy) \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$J_g = \begin{pmatrix} \sin(y)\cos(z) & x\cos(y)\cos(z) & -x\sin(y)\sin(z) \\ \sin(y)\sin(z) & x\cos(y)\sin(z) & x\sin(y)\cos(z) \\ \cos(y) & x\sin(y) & 0 \end{pmatrix}$$

H18

$Q(k,L) = 60 k^{1/2} L^{1/3}$

a) $Q_k(k,L) = 60 \cdot \frac{1}{2} k^{-1/2} L^{1/3}$

$= 30 \frac{L^{1/3}}{k^{1/2}}$

$Q_L(k,L) = 60 \cdot 1/3 \; k^{1/2} L^{-2/3}$

$= 20 \frac{k^{1/2}}{L^{2/3}}$

$z = Q(900,1000) + Q_k(900,1000)(k-900) + Q_L(900,1000)(L-1000)$

$= 18000 + 30 \cdot \frac{10}{30} (k-900) + 20 \frac{30}{100} (L-1000)$

$= 18000 + 10(k-900) + 6(L-1000)$

b) $dQ = 30 \frac{L^{1/3}}{k^{1/2}} dk + 20 \frac{k^{1/2}}{L^{2/3}} dL$

c) $\Delta Q = 30 \frac{1000^{1/3}}{900^{1/2}} 1 + 20 \frac{900^{1/2}}{1000^{2/3}} (-2)$

$= 10 - 12 = -2$ lineare Approximation

d) $Q(901, 998) - Q(900, 1000)$

$= 17997{,}98 - 18000 = -2{,}02$