G 21

a) Seien x_k, y_k zwei gegen 0 konvergente Folgen.

Betrachte $d := |f(x_k, y_k) - 0|$

für $y_k \neq 0$: $d = \left| \frac{x_k^2 y_k}{x_k^2 + y_k^2} \right| \leq \left| \frac{x_k^2 y_k}{x_k^2} \right| = |y_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

für $y_k = 0$: $d = 0 \leq |y_k|$

b) für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

für $(x,y) = (0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Sei $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ und $x_k = y_k$, dann gilt

$$|f_x(x_k, y_k)| = \left| \frac{2x_k^4}{4x_k^4} \right| = \left| \frac{1}{2} \right| \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

also ist f_x nicht stetig und somit f in $(0,0)$ nicht stetig differenzierbar.

c) Falls f differenzierbar ist, so muss nach 13.13

$J_f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$ gelten, also

$$f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - J_f(0,0)\cdot(h_1,h_2)^T = r(h)\cdot\|h\|$$

d.h. $r(h) = \dfrac{f(h_1,h_2)}{\|h\|}$ und $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = 0$.

Für $h_1 = h_2$ gilt jedoch

$$\frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|} = \frac{\frac{h_1^3}{2h_1^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1}{2\sqrt{2}\,|h_1|}$$

also

$|r(h)| = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ somit $\lim\limits_{h\to 0} r(h) \neq 0$, d.h. die Annahme f sei in $(0,0)$ total differenzierbar war falsch.

G 22

a) $Q(x+h) - Q(x)$

$$= \langle x+h, A(x+h)\rangle + \langle b, x+h\rangle - \langle x, Ax\rangle - \langle b, x\rangle$$

$$= \langle x+h, Ax\rangle + \langle x+h, Ah\rangle - \langle x, Ax\rangle + \langle b,h\rangle$$

$$= \langle x, Ax\rangle + \langle h, Ax\rangle + \langle x, Ah\rangle + \langle h, Ah\rangle - \langle x, Ax\rangle + \langle b,$$

$$= 2\langle x, Ah\rangle + \langle h, Ah\rangle + \langle b,h\rangle \quad (\text{da } A^T = A)$$

$$= 2\langle Ax, h\rangle + \langle h, Ah\rangle + \langle b,h\rangle$$

$$= \langle 2Ax + b, h\rangle + \langle h, Ah\rangle$$

quadratischer Teil

$r(h)\cdot\|h\|$

b) Also

$$Q(x+h) - Q(x) - (2Ax+b)^T \cdot h = \|h\| \cdot \underbrace{\frac{(Ah)^T \cdot h}{\|h\|}}_{\to 0 \text{ für } h \to 0}$$

nach 13.12 zeigt dies, dass f differenzierbar ist.

$(2Ax+b)^T$ ist die Jacobi Matrix.

c) $Q(x_1,x_2) = \langle x, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x\rangle + \langle \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}, x\rangle$

$$J_Q = \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^T$$

$$= (2x_1 + 2x_2 + 10,\ 2x_1 + 3)$$

G 23

a) $f_x = 2x - 3y - y^2 z^3$

$f_y = -3x + 4z - 2xyz^3$

$f_z = 4y - 3xy^2 z^2$

alle partielle Ableitungen erster Ordnung existieren.

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x - 3y - y^2 z^3, -3x + 4z - 2xyz^3, 4y - 3xy^2 z^2)$

$f_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -3 - 2yz^3$

ist stetig

Nach dem Satz von Schwarz (13.11) folgt

$f_{xy} = f_{yx}$.

b)

$$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für} & x = y = 0 \text{ und } z \neq 0 \\ & x = z = 0 \text{ und } y \neq 0 \\ & y = z = 0 \text{ und } x \neq 0 \end{array}\right\} \operatorname{rang}(J_g) = 1$$

für $x = y = z = 0$ $\quad\operatorname{rang}(J_g) = 0$

zu a) im Punkt $(1,1,1)$ ist die Ableitung $(-2,-1,1)$