Hausübung

Aufgabe H13 (Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ + Wiederholung) (3 Punkte)

Gucken Sie sich Satz 13.5 im Skript an. Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$ ist also äquivalent zur Konvergenz in $\mathbb{R}$ der Folgen in den einzelnen Komponenten.

Sei die Folge (x_k) gegeben durch

$$x_k := \left((-1)^k \frac{1}{k+1}, \frac{1+2+\cdots+k}{k^2} \right).$$

Berechnen Sie Ihren Grenzwert $x \in \mathbb{R}^2$.

Lösung: Erste Komponente:

$$x1_n := (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

konvergiert gegen 0

Zweite Komponente:

$$x2_n := \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

Es gilt $1+2+\cdots+n = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ und somit $x2_n := \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1+1/n}{2}$.

Daraus folgt $x = (0, 1/2)$.

Aufgabe H14 (Drehung) (4 Punkte)

Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse.

- Bestimmen Sie die Richtung v_A der Drehachse, beachten Sie dabei, dass bei einer Drehung die Vektoren der Drehachse dadurch ausgezeichnet sind, dass sie durch die Drehung nicht verändert werden. Es gilt also $Av_a = v_a$. Finden sie den passenden Eigenvektor!
- Bestimmen Sie den Drehwinkel, dazu bestimmen Sie einen zu v_A senkrechten Vektor w und dessen Bild Aw. Der Drehwinkel ist dann den Winkel α zwischen Aw und w.

(*Tipp:* Es gilt $\langle x, y\rangle = |x||y|cos(x, y)$.)

Lösung: Bei einer Drehung sind die Vektoren der Drehachse dadurch ausgezeichnet, dass sie durch die Drehung nicht verändert werden, dass also $Ax = x$ gilt. D.h. x ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir bestimmen diese Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}-1 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4II, III+4I} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3}+2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I+(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}})} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(8-4\sqrt{3}) & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $(1,0,1)^T$ ein solcher Eigenvektor und damit ist $(1,0,1)^T$ die Richtung der Drehachse. Um den Drehwinkel zu bestimmen, bilden wir einen zur Drehachse senkrechten Vektor. z.B. $x = (0,1,0)^T$ mit der Drehung ab. Es gilt

$$Ax = A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\\ -\frac{1}{4}\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

und der Winkel α zwischen x und Ax ist der Drehwinkel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, Ax\rangle}{||x|| \cdot ||Ax||} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

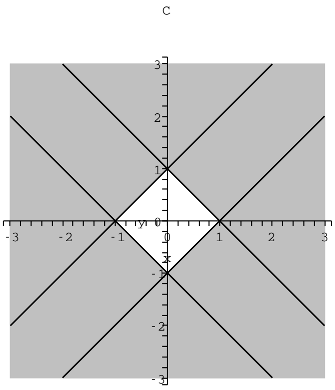
also gilt $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe H15 (Offen, abgeschlossen, kompakt) (2 Punkte)

Skizzieren Sie die Menge

$$C \quad = \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\}$$

und geben Sie mit Begründung an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt ist.



Lösung: zu C:

- nicht offen, denn $(-1,0) \in C$, aber ist kein innerer Punkt, da $(-1, \varepsilon/2) \notin C$.
- abgeschlossen, denn $\partial C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\} \subseteq C$.
- nicht beschränkt, denn $(n,0) \in C \forall n \in \mathbb{N}$.
- nicht kompakt, da nicht beschränkt.

Am 12.06. und am 26.06. finden zusätzliche Vorlesungen statt, jeweils um 9.50 Uhr in S103/223!