Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Jennifer Prasiswa

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008
05.06.2008

5. Übung zur „Mathematik II für Chemiker"

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Orthonormalbasis)

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\text{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Offensichtlich gilt $v_3 = 2v_2$. Daher ist $\text{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{lin}(v_1, v_2, v_4)$. Mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt kann aus v_1, v_2, v_4 eine Orthonormalbasis für $\text{lin}(v_1, v_2, v_4)$ bestimmt werden. (Ob v_1, v_2, v_4 linear unabhängig sind, kann im Verlauf des Verfahrens festgestellt werden.) Es ergeben sich die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \\
b_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
u_2 &= v_2 - \langle v_2, b_1 \rangle b_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T \\
b_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}}} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
u_3 &= v_4 - \langle v_4, b_1 \rangle b_1 - \langle v_4, b_2 \rangle b_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^T - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T \\
b_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T
\end{aligned}$$

Folglich ist (b_1, b_2, b_3) eine Orthonormalbasis von $\text{lin}(v_1, v_2, v_4)$.

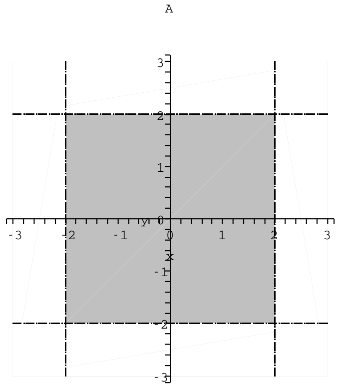
Aufgabe G18 (Offen, abgeschlossen, kompakt)

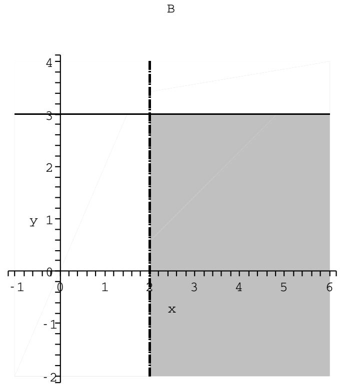
Skizzieren Sie die Mengen

$$\begin{aligned}
A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) < 2\}, \\
B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2,\ y \leq 3\}
\end{aligned}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung!) an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind. (Siehe Definition 13.3 im Skript)

Lösung:





zu A:

- offen, denn für jedes $(x, y) \in A$ ist $|x| < 2$ und $|y| < 2$, also gibt es ein $\epsilon_x > 0$ mit $|x| + \epsilon_x < 2$ und ein $\epsilon_y > 0$ mit $|y| + \epsilon_y < 2$. Für $\epsilon = \min\{\epsilon_x, \epsilon_y\}$ liegt die ϵ-Umgebung um (x, y) also in A. Also ist jeder Punkt von A innerer Punkt, d.h. A ist offen.
- nicht abgeschlossen, denn $(2, 0)$ ist ein Randpunkt von A (jede ϵ-Umgebung von $(2, 0)$ enthält den Punkt $(2 - \frac{\epsilon}{2}, 0) \in A$ und den Punkt $(2 + \frac{\epsilon}{2}, 0) \notin A$) daher $(2, 0) \notin A$.
- beschränkt, da für alle $(x, y) \in A$ gilt

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

- nicht kompakt, da nicht abgeschlossen.

zu B:

- nicht offen, denn $(3, 3) \in B$, aber $(3, 3)$ ist kein innerer Punkt von B, denn in jeder ϵ-Umgebung von $(3, 3)$ liegt der Punkt $(3, 3 + \frac{\epsilon}{2})$, der nicht zu B gehört.
- nicht abgeschlossen, denn $(2, 0) \in \partial B$ (Begründung wie oben), aber $(2, 0) \notin B$.
- nicht beschränkt, denn $(n, 3) \in B \ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \to \infty} \|(n, 3)\| = \lim_{n \to \infty} \sqrt{9 + n^2} = \infty.$$

- nicht kompakt, da nicht abgeschlossen.

Aufgabe G19 (Wiederholung aus erstem Semster: Stetigkeit in $\mathbb{R}$)

Geben Sie alle Unstetigkeitspunkte der folgenden Funktionen an und bestimmen Sie an diesen Punkten die einseitigen Grenzwerte (eigentliche oder uneigentliche).

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(f_1) = \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(f_2) = \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10} & \text{für} \quad x \neq 2, x \neq -5, \\ 0 & \text{für} \quad x = 2, x = -5. \end{cases}$

Und berechnen Sie $\lim_{x \to \infty} f_2(x)$.

Lösung:

a) Die Funktion f_1 ist unstetig an der Stelle $x = 0$, da der Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht existiert; als uneigentliche Grenzwerte ergeben sich linkseitig $f(0-) = -\infty$ und rechtsseitig $f(0+) = \infty$. An allen anderen Stellen ist f stetig.

b) Die Nullstellen des Nenners berechnen sich zu 2 und -5, während die Nullstellen des Zählers 2 und 7 sind. An der Stelle $x = 2$ ergibt sich der beidseitige Grenzwert

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-7)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-7}{x+5} = \frac{-5}{3},$$

der jedoch nicht mit dem Funktionswert an der Stelle $x = 2$ übereinstimmt. Die Funktion ist also an dieser Stelle nicht stetig. Bei $x = 5$ ist der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x\to 5, x>5} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x\to 5, x>5} \frac{x-7}{x+5} = +\infty$$

und der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x\to 5, x<5} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x\to 5, x<5} \frac{x-7}{x+5} = -\infty.$$

Also ist f_3 in $x = -5$ unstetig.

Dividert man Zähler und Nenner durch x^2, so sieht man sofort $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 1$.

Aufgabe G20 (Hauptachsentransformation (* für die ganz Schnellen))

Gucken Sie sich Beispiel 7 im Abschnitt 11.7 an und verfahren Sie analog: Betrachten Sie die durch

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1 + 4x_2 + 1 = 0$$

beschriebene Menge im $\mathbb{R}^2$. Schreiben Sie diese Gleichung als $x^T Ax + b^T x = c$ und führen Sie die Hauptachsentransformation durch. Um was für ein geometrisches Gebilde handelt es sich?

Lösung: Die Gleichung ist $x^T \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + x^T \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = -1$. Die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ sind 2 und 4. Wählt man die Eigenvektoren $(1,-1)^T$ bzw. $(1,1)^T$, so erhält man bezüglich des orthonormalen Koordinatensystems $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$ die transformierte Form

$$A' = S^T AS = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und $b' = S^T(12,4)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(8,16)^T$. Durch quadratische Ergänzung kommt man zu

$$2(y_1 + \sqrt{2})^2 + 4(y_2 + \sqrt{2})^2 = -1 + 4 + 8 = 11.$$

Es handelt sich also um eine Ellipse, deren Hauptachsen sich im Punkt $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ des neuen Koordinatensystems schneiden und zu den Koordinatenachsen des neuen Koordinatensystems parallel sind.

Dies entspricht im ursprünglichen Koordinatensystem einer Ellipse, deren um $\frac{\pi}{4}$ gegenüber dem Standardkoordinatensystem gedrehte Hauptachsen sich im Punkt $(-2,0)$ schneiden. Die Hauptachsen haben in beiden Koordinatensysten die Länge $\frac{\sqrt{11}}{2}$ und $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$.