Hausübung

Aufgabe H10 (Diagonalisierbarkeit) (4 Punkte)

Gegeben sei die diagonalähnliche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie für jeden Eigenwert einen zugehörigen Eigenvektor an.

(b) Geben Sie eine geeignete Transformationsmatrix an, welche A auf Diagonalgestalt transformiert. Bestimmen Sie hierzu eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $T^{-1} \cdot A \cdot T = D$, wobei D eine Diagonalmatrix bildet.

Lösung:

(a) Nach 11.1 im Skript stimmen die Eigenwerte von A mit den Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* überein. Wegen

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (-1)^3 \cdot \det(A - \lambda I) \\ &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & -11 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot [\lambda^2 \cdot (6-\lambda) + 6 - 11\lambda] \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\ &= (\lambda - 1) \cdot (2 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) \end{aligned}$$

sind

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 3$$

die *Eigenwerte* von A. Als nächstes soll zu jedem Eigenwert *ein* Eigenvektor bestimmt werden.Die Eigenvektoren von A sind die nichttrivialen Lösungen der Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i I) \cdot x_i = 0,$$

wobei $i = 1, 2, 3$. Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

$\underline{\lambda_1 = 1}$: Hier ist ein nichttrivialer Vektor $x_1 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$(A - \lambda_1 I) \cdot x_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix} \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Durch Raten (oder durch die Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens) erhält man den Vektor

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$: In diesem Fall ist eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems

$$(A - \lambda_2 I) \cdot x_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu ermitteln. Eine solche ist beispielsweise durch

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

$\underline{\lambda_3 = 3:}$ Eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems

$$(A - \lambda_3 I) \cdot x_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix} \cdot x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bildet der Vektor

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Da A diagonalähnlich ist, können wir Satz 13.8 auf S.68 a.a.O. verwenden. Setzen wir

$$T = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

wobei

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

■

Aufgabe H11 (Orthonormalbasis) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Stellen sie den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.

Lösung: Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \cdot v_2 = 0 \\ v_1 \cdot v_3 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sind paarweise orthogonal.}$$

Es gilt ferner:

$$\left.\begin{array}{lcl} |v_1| & = & \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \\ |v_2| & = & 1 \\ |v_3| & = & \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sind normiert.}$$

Wegen

$$\begin{array}{l} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1+\alpha_3) \\ \alpha_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1-\alpha_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{array}$$

sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.
Es folgt also, dass v_1, v_2, v_3 eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Daher gilt

$$\begin{aligned} v &= (v_1 \cdot v)\, v_1 + (v_2 \cdot v)\, v_2 + (v_3 \cdot v)\, v_3 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) v_1 + 2v_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) v_3 \\ &= 2\sqrt{2}v_1 + 2v_2 - \sqrt{2}v_3. \end{aligned}$$

Aufgabe H12 (Definitheit) (2 Punkte)
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Geben Sie die Werte von a an, für die die Matrix A positiv definit ist.

Lösung: Nach Satz 11.22 reicht es zu untersuchen wann die Hauptdeterminanten positiv sind:

$$det(A_1) = 1$$

$$det(A_2) = 1 - a^2 > 0 \rightarrow a \in (-1, 1)$$

$$det(A_3) = (1 - a^2) - 2a(a - a^2) = (1 - a)^2(1 + 2a) > 0 \rightarrow 1 > -2a \rightarrow a \in (-1/2, \infty)$$

also ist A fÃ$\frac{1}{4}$r $a \in (-1/2, 1)$ positiv definit