Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Jennifer Prasiswa

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008
29.05.2008

4. Übung zur „Mathematik II fr Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Eigenwerte)

Sei A die reelle 2×2–Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $B_\lambda = A - \lambda E_2$. Berechne Werte λ_1 und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so daß $\det(B_{\lambda_i}) = 0$.

(b) Finde Vektoren v_1 und v_2, die $V_1 := \ker B_{\lambda_1}$ bzw. $V_2 := \ker B_{\lambda_2}$ erzeugen. Zeige, daß V die direkte Summe von V_1 und V_2 ist.

(c) Warum bilden die Vektoren v_1, v_2 eine Basis $\mathcal{B}'$?

(d) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis. Berechne die Matrix dieser Abbildung bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}'$.

Lösung:

(a) Es ist

$$\det B = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 6 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(5-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

(b) Um die Kerne zu bestimmen, erhält man mit Gauss–Jordan-Elimination

$$B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } B_2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher kann man $v_1 = \binom{2}{1}$ und $v_2 = \binom{3}{2}$ wählen. v_1 und v_2 sind linear unabhängig, daher ist $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und $V_1 + V_2 = V$. Also ist V die direkte Summe von V_1 und V_2.

(c) Die Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis.

(d) Die Übergangsmatrix von der Standardbasis zur Basis B' ist

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnet man die gesuchte Matrix A' als

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G14 (Quadratische Form, Diagonalisierbarkeit)
Mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist die quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

assoziiert.

(a) Geben Sie die Matrix A an und entscheiden Sie, ob A positiv oder negativ definit ist.

(b) Begründen Sie, warum die Matrix A diagonalähnlich ist und geben Sie eine geeignete invertierbare Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$ an, wobei $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix bildet.

Lösung:

(a) Die zur quadratischen Form Q_A gehörige Matrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, daß A positiv definit ist, genügt es nach Satz 11.21 im Skript nachzuweisen, daß die *Hauptunterdeterminanten*

$$D_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

für $i = 1, 2, 3$ positiv sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(7) = 7 > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 38 > 0 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162 > 0 \end{aligned}$$

und somit ist A *positiv definit*. Alternativ hätten wir (ebenfalls nach Satz 11.21) zeigen können, daß sämtliche Eigenwerte von A positiv sind. Das *charakteristische Polynom* von A besitzt die Darstellung

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (-1)^3 \cdot \det(A - \lambda I) \\ &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot [(7-\lambda)\cdot(6-\lambda)\cdot(5-\lambda) - 4\cdot(7-\lambda) - 4\cdot(5-\lambda)] \\ &= \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 \\ &= (\lambda - 3)\cdot(\lambda - 6)\cdot(\lambda - 9) \end{aligned}$$

und somit erhalten wir die *Eigenwerte*

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 9,$$

welche alle positiv sind.

(b) Da es sich bei A um eine *symmetrische* Matrix handelt, folgt mit Folgerung 11.20 die *Diagonalähnlichkeit* von A. Dieser Satz besagt außerdem, daß es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und ein Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D$$

gibt. Dabei sind die Diagonalelemente von D die Eigenwerte von A und die Spalten von S setzen sich aus den zugehörigen Eigenvektoren zusammen. Da wir die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 9,$$

im vorigen Aufgabenteil bereits bestimmt haben, ist nun noch für $i = 1, 2, 3$ zu jedem Eigenwert λ_i *ein* Eigenvektor x_i zu ermitteln, wobei darauf hingewiesen sei, daß jeder Eigenwert eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda_i)$ bildet und somit nach Bemerkung (7) auf S.66 a.a.O. der Kern von $A - \lambda_i I$ eindimensional ist. Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

$\underline{\lambda_1 = 3:}$ Hier ist *eine* Lösung des Gleichungssystems

$$(A - 3I) \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen, wozu das Gauß-Jordan-Verfahren verwendet werden soll:

	4	-2	0	0
	-2	3	-2	0
	0	-2	2	0
	4	-2	0	0
Z2+$\left(\frac{1}{2}\right)$ ·Z1	0	2	-2	0
	0	-2	2	0
Z1+Z2	4	0	-2	0
	0	2	-2	0
Z3+Z2	0	0	0	0
Z1· $\left(\frac{1}{4}\right)$	1	0	-$\frac{1}{2}$	0
Z2· $\left(\frac{1}{2}\right)$	0	1	-1	0
	0	0	0	0

Somit ist $x_{1,3}$ frei wählbar und wir erhalten

$$x_{1,2} = x_{1,3} \quad \text{und} \quad x_{1,1} = \frac{1}{2} x_{1,3}.$$

Wählt man beispielsweise

$$x_{1,3} = 2,$$

so bildet

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $(A - 3I) \cdot x_1 = 0$ und ist somit *ein* Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$.

$\underline{\lambda_2 = 6:}$ Zu betrachten ist das Gleichungssystem

$$(A - 6I) \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauß-Jordan-Verfahren folgt

	1	-2	0	0
	-2	0	-2	0
	0	-2	-1	0
	1	-2	0	0
Z2+2·Z1	0	-4	-2	0
	0	-2	-1	0
Z1+$\left(-\frac{1}{2}\right)$Z2	1	0	1	0
	0	-4	-2	0
Z3+$\left(-\frac{1}{2}\right)$Z2	0	0	0	0
	1	0	1	0
Z2· $\left(-\frac{1}{4}\right)$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
	0	0	0	0

Hier ist $x_{2,3}$ frei wählbar und es folgt

$$x_{2,2} = -\frac{1}{2} x_{2,3} \quad \text{und} \quad x_{2,1} = -x_{2,3}.$$

Wird nun beispielsweise

$$x_{2,3} = 2$$

gewählt, dann ist

$$x_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $(A - 6I) \cdot x_2 = 0$ und ist damit zugleich *ein* Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$.

$\underline{\lambda_3 = 9:}$ In diesem Fall ist *eine* Lösung des Gleichungssystems

$$(A - 9I) \cdot x_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

zu ermitteln. Mit dem Gauß-Jordan-Verfahren folgt

	-2	-2	0	0
	-2	-3	-2	0
	0	-2	-4	0
	-2	-2	0	0
Z2-Z1	0	-1	-2	0
	0	-2	-4	0
Z1+(-2)·Z2	-2	0	4	0
	0	-1	-2	0
Z3+(-2)·Z2	0	0	0	0
Z1· $\left(-\frac{1}{2}\right)$	1	0	-2	0
Z2·(-1)	0	1	2	0
	0	0	0	0

Damit ist $x_{3,3}$ frei wählbar und es gilt

$$x_{3,2} = -2x_{3,3} \quad \text{und} \quad x_{3,1} = 2x_{3,3}.$$

Setzen wir beispielsweise

$$x_{3,3} = 1,$$

dann erhalten wir mit

$$x_3 = \begin{pmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $(A - 9I) \cdot x_3 = 0$, die zugleich auch *einen* Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 9$ darstellt.

Setzen wir nun

$$S := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

dann erhalten wir mit

$$S^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

schließlich die gewünschte Darstellung der Form

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D.$$

Aufgabe G15 (Basiswechsel)

Die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$_EM_E(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$) gegeben.
Bestimme die Darstellungsmatrix $_BM_B(f)$ von f bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Lösung: (Siehe 11.2 Beispiel 3) Sei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist S die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung, die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B auf Koordinatenvektoren bezüglich der Standardbasis E abbildet. Dann folgt für die Darstellungsmatrix $_BM_B(f)$ von f bezüglich der Basis B

$$_BM_B(f) = S^{-1}\,{}_EM_E(f)S.$$

Es ist zunächst die Inverse von S zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II+I \\ III+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{I-II \\ III-2II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I-\frac{1}{2}III \\ II+III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Folglich gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} _BM_B(f) = S^{-1}\,{}_EM_E(f)S &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe G16 (Positiv und negativ definit bzw. semidefinit)

Gucken Sie sich Definition 11.21 im Skript an. Welche der folgenden Matrizen sind

(i) positiv definit,

(ii) negativ definit,

(iii) indefinit,

(iv) positiv semidefinit,

(v) negativ semidefinit?

Begründen Sie jeweils und geben Sie im indefiniten Fall Vektoren an, die Ihre Behauptung belegen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- A_1 und A_6 sind positiv semidefinit (Eigenwerte≥ 0)
- A_2 ist positiv definit (Hauptdeterminanten > 0)
- A_8 ist negativ semidefinit (siehe Diagonaleinträge)
- die restlichen Matrizen sind indefinit, zum Beispiel A_3: $\langle A_3 e_1, e_1\rangle = 4 > 0$ aber $\langle A_3(e_1 - e_2), (e_1 - e_2)\rangle = -1 < 0$