Hausübung

Aufgabe H7 (Gaußscher Algorithmus) (4 Punkte)

Durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wird ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ beschrieben.

a) Bestimmen Sie die Lösung dieses linearen Gleichungssystems mit dem Eliminationsverfahren von Gauß.

b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.

Lösung: Eliminationsverfahren von Gauß

(a) Bei der Anwendung des *Eliminationsverfahrens von Gauß* wird zunächst in der *Eliminationsphase* aus dem ursprünglichen Gleichungssystem mittels *elementarer Zeilenumformungen* in 2 Schritten ein *gestaffeltes Gleichungssystem*

$$A^{(3)} \cdot x = b^{(3)}$$

abgeleitet, bei dem die Matrix $A^{(3)}$ *Dreiecksgestalt* besitzt:

	1	4	0	1
	1	0	2	- 2
	4	8	4	- 2
	1	4	0	1
Z2 + (-1) · Z1	0	- 4	2	- 3
Z3 + (-4) · Z1	0	- 8	4	- 6
	1	4	0	1
	0	- 4	2	- 3
Z3 -2 Z2	0	0	0	0

Somit erhalten wir mit

$$\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= \frac{1}{-4} \cdot (-3 - 2t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t, \\ x_1 &= \frac{1}{1} \cdot (1 - 4x_2) = -2 - 2t \end{aligned}$$

die Lösungsmenge ist

$$\{(-2 - 2t, \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t, t)^T : t \in \mathbb{R}\}$$

(b) Nach der ersten Spalte aufgelöst gilt

$$\det A = -16 - 16 + 32 = 0.$$

Aufgabe H8 (Determinanten) (4 Punkte)

Berechnen Sie für jedes $b \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 4 + 2 \cdot (2 - 1) - 3 \cdot (-2) = -8 + 2 + 6 = 0$$

(Jeweils) nach zweiter Spalte:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = b \cdot b \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

$$= b^2(b^2 - 1) - (b^2 - 1) = (b^2 - 1)^2 = ((b + 1)(b - 1))^2 = (1 + b)^2(1 - b)^2$$

Aufgabe H9 (Inverse) (4 Punkte)

Berechnen Sie mittels des Gauß-Algorithmuses die Inverse der Matrix A und bestimmen Sie anschließend die Lösung des Gleichungssystemes $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Mittels Gaußschem Algorithmus

1	0	3	2	1	0	0	0	
-1	2	1	-2	0	1	0	0	$\|Z2 + Z1$
2	1	0	4	0	0	1	0	$\|Z3 - 2Z1$
3	-2	1	2	0	0	0	1	$\|Z4 - 3Z1$
1	0	3	2	1	0	0	0	
0	2	4	0	1	1	0	0	
0	1	-6	0	-2	0	1	0	$\|2Z3 - Z2$
0	-2	-8	-4	-3	0	0	1	$\|Z4 + Z2$
1	0	3	2	1	0	0	0	
0	2	4	0	1	1	0	0	
0	0	-16	0	-5	-1	2	0	
0	0	-4	-4	-2	1	0	1	$\|4Z4 - Z3$
1	0	3	2	1	0	0	0	
0	2	4	0	1	1	0	0	$\|Z2/2$
0	0	-16	0	-5	-1	2	0	$\|Z3/(-16)$
0	0	0	-16	-3	5	-2	4	$\|Z4/(-16)$
1	0	3	2	1	0	0	0	$\|Z1 - 3Z3$
0	1	2	0	$1/2$	$1/2$	0	0	$\|Z2 - 2Z3$
0	0	1	0	$5/16$	$1/16$	$-2/16$	0	$\|Z2 - 2Z3$
0	0	0	1	$3/16$	$-5/16$	$2/16$	$-4/16$	
1	0	0	2	$1/16$	$-3/16$	$6/16$	0	$\|Z1 - 2Z4$
0	1	0	0	$-2/16$	$6/16$	$4/16$	0	
0	0	1	0	$5/16$	$1/16$	$-2/16$	0	
0	0	0	1	$3/16$	$-5/16$	$2/16$	$-4/16$	
1	0	0	0	$-5/16$	$7/16$	$2/16$	$8/16$	
0	1	0	0	$-2/16$	$6/16$	$4/16$	0	
0	0	1	0	$5/16$	$1/16$	$-2/16$	0	
0	0	0	1	$3/16$	$-5/16$	$2/16$	$-4/16$	

Daher

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 2 & 8 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

und $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{16}(-4, 8, 4, 4)^T$.