Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Jennifer Prasiswa

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
08.05.2008

3. Übung zur „Mathematik II für Chemiker“

Bitte beachten Sie: Die vierte Übung wird wegen des Feiertags auf den 29.5 verlegt!

Gruppenübung

Aufgabe G9 (Lösbarkeit von Gleichungssystemen)

Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen über die Lösbarkeit des Gleichungssystems (GS):

$$A \cdot x = b$$

- ☐ (GS) ist für alle $b \in \mathbb{R}^2$ unlösbar.
- ☐ (GS) ist nur für spezielle rechte Seiten b lösbar.
- ☐ (GS) besitzt für jede rechte Seite b genau eine Lösung.
- ☐ (GS) besitzt für jede rechte Seite b viele Lösungen.

Lösung: (GS) besitzt für jede rechte Seite b viele Lösungen.

Aufgabe G10 (Gaußscher Algorithmus)

Bestimmen Sie mittels des Eliminationsverfahrens von Gauß die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & -9 \\ -1 & -5 & 3 & 2 \\ -3 & 24 & 15 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 1 \\ -9 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Eliminationsverfahren von Gauß

Eliminationsphase:

	2	11	4	-9	-22
	- 1	-5	3	2	1
	- 3	24	15	3	-9
	4	5	2	-13	-24
	2	11	4	-9	-22
Z2+$(\frac{1}{2})$·Z1	0	$\frac{1}{2}$	5	-$\frac{5}{2}$	-10
Z3+$(\frac{3}{2})$·Z1	0	$\frac{81}{2}$	21	-$\frac{21}{2}$	-42
Z4+(-2)·Z	0	-17	-6	5	20
	2	11	4	-9	-22
	0	$\frac{1}{2}$	5	-$\frac{5}{2}$	-10
Z3+(-81)·Z2	0	0	-384	192	768
Z4+34·Z2	0	0	164	-80	-320
	2	11	4	-9	-22
	0	$\frac{1}{2}$	5	-$\frac{5}{2}$	-10
	0	0	-384	192	768
Z4+$\frac{164}{384}$·Z3	0	0	0	2	8

Lösungsphase:

$$x_4 = \frac{8}{2} = 4,$$
$$x_3 = \frac{1}{-384} \cdot (768 - 192 \cdot 4) = 0,$$
$$x_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \left(-10 - 5 \cdot 0 - \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 4\right) = 0,$$
$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot (-22 - 11 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - (-9) \cdot 4) = 7.$$

Aufgabe G11 (Determinanten)

Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Determinanten

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = 21 - 10 = 11$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot (-4) + 9 \cdot 7 \cdot 3 - 9 \cdot 5 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 7 \cdot 0$$
$$= 0 - 16 + 189 + 180 - 18 - 0$$
$$= 335.$$

Aufgabe G12 (Inverse)

Mittels des Gaußschen Algorithmus lassen sich auch Inverse berechnen, dabei beginnt man mit Matrix und Einheitsmatrix passender Größe, führt solange Zeilentransformationen durch bis man auf der linken Seite die Einheitsmatrix erhält und bekommt dadurch schliesslich die Inverse.

Zum Beispiel gilt für die Matrix A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II+I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{I-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Daraus folgt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertieren Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie ihr Ergebnis durch Berechnung von BB^{-1}.

Lösung: Für die Matrix B gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II-I \\ III-I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{2}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{II\leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{III+II \\ I-4II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{I-3III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Daraus folgt

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$