H4

a) $(BC)\cdot(-AD+3D)$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(- \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -24 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \end{pmatrix} = 63$$

b)

$$EF = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E^T F = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

H5

a) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$\dim \operatorname{Ker} A = 3 - 1 = 2$

$A \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} = 0, A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig $\rightarrow$ bilden Basis des Kerns

b) $\operatorname{rang} (A|b_1) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

nach Lemma 9.3 ist $Ax = b_1$ lösbar

$$\operatorname{rang} (A, b_2) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\rightarrow$ nicht lösbar

c) $\operatorname{rang} (A, b)$ muss 1 sein also $b = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

H6

a)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & a & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & a-12 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{2te Zeile} - 2\times \text{1te Zeile} \\ \leftarrow \text{3te Zeile} - 3\times \text{1te Zeile} \\ \leftarrow \text{4te Zeile} - \text{1te Zeile} \end{array}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{4te Zeile} \\ \leftarrow \text{3te Zeile} + 3\times \text{4te Zeile} \\ \leftarrow \text{2te Zeile} \end{array}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 1/(a-13) \cdot \text{3te Zeile} + \text{2te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

$\uparrow$ 2te Spalte $-2\times$ 1te Spalte, ...

$$= \begin{cases} 3 & \text{falls } a \neq 15 \\ 2 & \text{falls } a = 15 \end{cases}$$

b) nach Lemma 9.2 :

$$\dim \ker A = 4 - \operatorname{rang} A = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \neq 15 \\ 2 & \text{falls } a = 15 \end{cases}$$

nach Dimensionssatz :

$$\dim \operatorname{Im} A = 4 - \dim \ker A = \operatorname{rang} A$$