G 5

a)

$$A + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C+C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

alle anderen Summen wegen Dimension der Matrizen ausgeschlossen

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

andere Kombinationen nicht möglich

b)

$$BD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad DB = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$CF = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad FC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Nein, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$$\neq A^2 + 2AB + B^2$$

da ~~[illegible]~~ im Allgemeinen

$$AB \neq BA$$

siehe b)

G6

a)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Vielfaches von erster Spalte abgezogen.

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Letzte Zeile normiert und von andern abgezogen.

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Weiter Additionen und normieren.

$= 3$

b) $\dim \ker A = 4 - \operatorname{rang} A = 1$

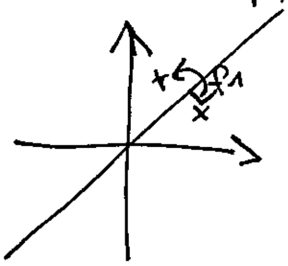
$\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rang} A = 3$

nach Lemma 9.2 & Dimensionssatz

G7

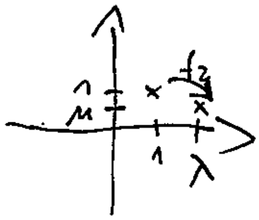
$$f_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}$$

Spiegelung an 1. Winkelhalbierenden



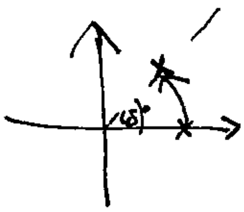
$$f_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\mu x_2\end{pmatrix}$$

Streckung um Faktor λ in x-Richtung
und Faktor μ in y-Richtung



$$f_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}$$

Drehung um $45°$ gegen Uhrzeigersinn



$$f_4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+\lambda x_2\\x_2\end{pmatrix}$$

Scherung

G8

Bild von $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

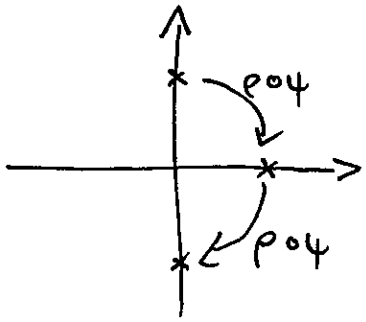
$$A_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad A_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bild von $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\varphi \circ \psi$:

$$A_\rho \cdot A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht einer Drehung um $90°$ im Uhrzeigersinn



$\psi \circ \rho$:

$$A_\psi \cdot A_\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht einer Drehung um $90°$ gegen Uhrzeigersinn