H_1

a) $w(\alpha x) \neq \alpha w(x)$

z.B. $\alpha = i \quad x = 1+i$

$$w(\alpha x) = w(i-1) = \overline{i-1} = -i-1$$

$$\alpha w(x) = i(\overline{1+i}) = i(1-i) = i+1$$

w ist nicht linear

b) $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$

sei $\alpha = -1$: $|\alpha x| = |x| \neq -|x| = \alpha |x|$

die Betragsfunktion ist nicht linear

c) $$t(\alpha x + y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i + y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + t(y)$$

$$= \alpha\, t(x) + t(y)$$

t ist eine lineare Abbildung, mit

$\ker t = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ ← nach Dimensionsformel (n-1) dimensional

$\operatorname{Im} t = \mathbb{R}$

d) $$\rho(\alpha x) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \cdot \alpha x_2 \\ \alpha x_1 + 2\alpha x_2 \\ 3\alpha x_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha(x_1 x_2) \\ \alpha(x_1 + 2x_2) \\ \alpha(3x_1) \end{pmatrix} = \alpha \rho(x)$$

ρ ist keine lineare Abbildung

(H2)

a) $\phi\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \phi\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \phi\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \phi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \phi\left(2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$

also

$v = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ also $\phi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(-1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ also $\phi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

somit ist

$\phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \phi\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-y\\x+y\end{pmatrix}$

c) $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\phi = 2$

$\ker\phi = \{0\} \Rightarrow \dim\ker\phi = 0 = \dim\mathbb{R}^2 - \dim\operatorname{Im}\phi$

H3

a) $(\omega \circ \rho)(\alpha x + y) = \omega(\rho(\alpha x + y))$

$= \omega(\alpha \rho(x) + \rho(y))$ ρ linear

$= \alpha\, \omega(\rho(x)) + \omega(\rho(y))$ ω linear

$= \alpha (\omega \circ \rho)(x) + (\omega \circ \rho)(y)$

die Verkettung zweier linearer Abbildungen ist ebenfalls linear

b) $(\rho \circ \rho)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

↑
Drehung um 180°

$\rho \circ (\rho \circ (\rho \circ \rho)) = \rho\left(\rho\left(-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = \rho\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

↑
Identität

ρ entspricht einer Drehung um 90°: