G1

a) zu überprüfen: $\rho(\alpha a) = \alpha \rho(a)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

und

$\rho(a+b) = \rho(a) + \rho(b)$

$$\rho(\alpha a) = \rho\begin{pmatrix}\alpha a_1\\ \alpha a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a_1 + \alpha a_2\\ 2\alpha a_1 + 2\alpha a_2\end{pmatrix}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix}a_1 + a_2\\ 2a_1 + 2a_2\end{pmatrix} = \alpha\rho\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} = \alpha\rho(a)$$

$$\rho(a+b) = \rho\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ a_2+b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+b_1+a_2+b_2\\ 2(a_1+b_1)+2(a_2+b_2)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\\ (2a_1+2a_2)+(2b_1+2b_2)\end{pmatrix}$$

$$= \rho(a) + \rho(b)$$

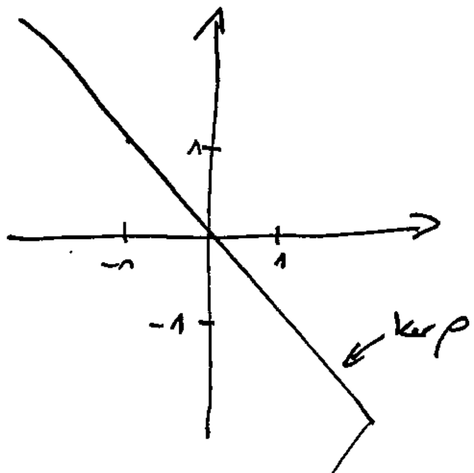
somit ist ρ linear.

b) $\ker\rho = \{a \in \mathbb{R}^2 : \rho(a) = 0\}$

$= \{a \in \mathbb{R}^2 : a_1 + a_2 = 0\}$

$= \{a \in \mathbb{R}^2 : a_1 = -a_2\}$

$= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

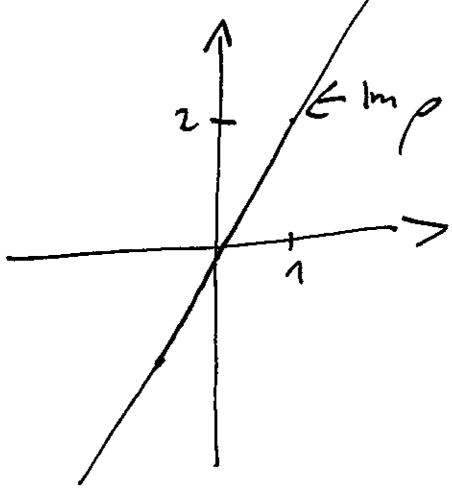


$\operatorname{Im}\rho = \{\rho(a) : a \in \mathbb{R}^2\}$

$= \left\{\begin{pmatrix}a_1+a_2\\ 2(a_1+a_2)\end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^2\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}(a_1+a_2) : a \in \mathbb{R}^2\right\}$

$= \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\right\}$



c) $\dim \operatorname{Im} \rho = 1$, $\dim \operatorname{Ker} \rho = 1$

$\dim \mathbb{R}^2 = 2 \overset{\checkmark}{=} \dim \operatorname{Im} \rho + \dim \operatorname{Ker} \rho$

G2

a) Zeig $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + (-\lambda_2) = 0 \end{array}\right\} 3\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\lambda_3 = 0$

Das zeigt, daß die 3 Vektoren linear unabhängig sind somit bilden sie eine Basis.

b) $u_4 = 2 \cdot (u_1 + u_2 + u_3)$

da ρ lineare ist gilt

$$\rho(u_4) = \rho(2u_1 + 2u_2 + 2u_3) = 2\rho(u_1) + 2\rho(u_2) + 2\rho(u_3)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

c) Umgekehrt gilt

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho(u_1) + 2\rho(u_2) = \rho(u_1 + 2u_2)$$

also ist

$$u_5 = u_1 + 2u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

G3

1) $(\rho+\omega)(\lambda x) = \rho(\lambda x) + \omega(\lambda x)$

$= \lambda\rho(x) + \lambda\omega(x)$ da ρ, ω linear

$= \lambda\,(\rho(x) + \omega(x))$

$= \lambda\,(\rho+\omega)(x)$

2) $(\rho+\omega)(x+y) = \rho(x+y) + \omega(x+y)$

$= \rho(x) + \rho(y) + \omega(x) + \omega(y)$ ρ, ω linear

$= (\rho(x) + \omega(x)) + (\rho(y) + \omega(y))$

$= (\rho+\omega)(x+y)$

$\Rightarrow$ somit ist die Abbildung $(\rho+\omega)$ eine lineare Abbildung

G4

a) $\rho(\alpha v + w) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha v_1 + w_1 - \alpha v_2 - w_2 \\ \alpha 2 v_2 + 2w_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 - w_2 \\ 2w_2 \end{pmatrix}$

$= \alpha\rho(v) + \rho(w)$

d.h. ρ ist eine lineare Abbildung

$\ker \rho = \{0\}$ (da $2v_2 = 0$ und $v_1 - v_2 = 0$)

$\operatorname{Im} \rho = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $t(v+w) = v+w+t$

$\neq$ falls $t \neq 0$

$t(v)+t(w) = v+t+w+t$

somit ist t im Allgemeinen nicht linear

c) $\tau(\lambda v+w) = \alpha(\lambda v+w) = \alpha\lambda v+\alpha w$

$= \lambda(\alpha v) + \alpha w$

$= \lambda\tau(v) + \tau(w)$

τ ist eine lineare Abbildung

$\ker \tau = \{0\}$ für $\alpha \neq 0$

$\ker \tau = \mathbb{R}^2$ für $\alpha = 0$

$\operatorname{Im} \tau = \mathbb{R}^2$ für $\alpha \neq 0$

$\operatorname{Im} \tau = \{0\}$ für $\alpha = 0$

d) Sei $p(x) = x^2$

$\varphi(\lambda x) = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2$

$\lambda p(x) = \lambda x^2$ $\neq$ für $\lambda \neq 1$, muss für alle λ gelten

somit ist φ nicht linear