Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Jennifer Prasiswa

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
05.06.2008

6. Übung zur „Mathematik II für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G21 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ für } (x,y) = 0 \text{ und } f(0,0) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und überprüfen Sie ob diese stetig sind.

c) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht total differentierbar ist.

Gucken Sie sich die Grafik vor Satz 13.13 an und überlegen Sie sich an Hand von f das die Umkehrungen der Implikationen nicht gelten.

Aufgabe G22 (Jacobi Matrix einer Quadratischen Form)
Gegeben sei eine quadratische Form $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$Q(x) = \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle .$$

a) Berechnen Sie $Q(x+h) - Q(x)$.

b) Wie sieht die Jacobimatrix von Q aus?

c) Finden sie die Jacibimatrix für $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2 + 10x_1$ mit ihrem Ergebniss aus b).

Aufgabe G23 (Partielle Ableitungen)

a) Bestimmen Sie den Gradienten zu folgender Funktion und berechnen Sie die Ableitung im Punkt $(1,1,1)$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2 - 3xy + 4yz - xy^2z^3$$

Entscheiden Sie, ob $f_{xy} = f_{yx}$ gilt, ohne beide partiellen Ableitungen zu bestimmen.

b) Bestimmen Sie die Jacobi Matrix von

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g(x,y,z) = (x^2 + y^2, y^2 + z^2)$$

In welchen Punkten ist ihr Rang kleiner als 2?

Hausübung

Aufgabe H16 (Differenzierbarkeit) (4 Punkte)

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass h stetig ist.
Ist h auf ganz $\mathbb{R}^2$ differentierbar?

Aufgabe H17 (Jacobi Matrix) (3 Punkte)

Berechne die Jakobi-Matrix folgender Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (xy, \cosh(xy), \log(1+x^2))$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (x\sin(y)\cos(z), x\sin(y)\sin(z), x\cos(y))$

Aufgabe H18 (Tangentialebene und Differential) (5 Punkte)

In einem Unternehmen beträgt der tägliche Produktionsausstoss

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ Q(K,L) = 60K^{1/2}L^{1/3}$$

Einheiten, wobei K das Kapitalinvestment in Einheiten zu 10.000 Euro bezeichnet und L die Höhe der eingesetzten der Arbeitskraft (in Mann-Stunden). Der gegenwärtigen Kapitaleinsatz beträgt 9.000.000 Euro und 1.000 Mann-Stunden werden pro Tag eingesetzt.

a) Berechnen Sie die Tangentialebene an den Graphen den Funktion Q im aktuellen Punkt $(900, 1000, Q(900, 1000))$.

b) Wie lautet das vollständige Differential dQ von Q?

c) Schätzen Sie die Änderung des Ausstosses ab, wenn der Kapitaleinsatz um 10.000 Euro erhöht wird und die Anzahl der Mann-Stunden um 2 sinkt, indem sie die Änderungen dK, dL in das Differential einsetzen.

d) Berechnen Sie nun den tatsächlichen Wert von Q, nach der Änderung von K und L. (Wie Sie beobachten können stimmt der absolute Zuwachs der Funktion bis auf einen Fehler zweiter Ordnung mit dem totalen Differential überein.)