Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Jennifer Prasiswa

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008
05.06.2008

5. Übung zur „Mathematik II für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Orthonormalbasis)

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\text{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G18 (Offen, abgeschlossen, kompakt)

Skizzieren Sie die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) < 2\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2,\ y \leq 3\} \end{aligned}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung!) an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind. (Siehe Definition 13.3 im Skript)

Aufgabe G19 (Wiederholung aus erstem Semster: Stetigkeit in $\mathbb{R}$)

Geben Sie alle Unstetigkeitspunkte der folgenden Funktionen an und bestimmen Sie an diesen Punkten die einseitigen Grenzwerte (eigentliche oder uneigentliche).

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(f_1) = \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(f_2) = \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9x+14}{x^2+3x-10} & \text{für} \quad x \neq 2, x \neq -5, \\ 0 & \text{für} \quad x = 2, x = -5. \end{cases}$

Und berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} f_2(x)$.

Aufgabe G20 (Hauptachsentransformation (* für die ganz Schnellen))

Gucken Sie sich Beispiel 7 im Abschnitt 11.7 an und verfahren Sie analog: Betrachten Sie die durch

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1 + 4x_2 + 1 = 0$$

beschriebene Menge im $\mathbb{R}^2$. Schreiben Sie diese Gleichung als $x^T Ax + b^T x = c$ und führen Sie die Hauptachsentransformation durch. Um was für ein geometrisches Gebilde handelt es sich?

Hausübung

Aufgabe H13 (Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ + Wiederholung) (3 Punkte)

Gucken Sie sich Satz 13.5 im Skript an. Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$ ist also äquivalent zur Konvergenz in $\mathbb{R}$ der Folgen in den einzelnen Komponenten.

Sei die Folge (x_k) gegeben durch

$$x_k := \left((-1)^k \frac{1}{k+1}, \ \frac{1+2+\cdots+k}{k^2} \right).$$

Berechnen Sie Ihren Grenzwert $x \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe H14 (Drehung) (4 Punkte)

Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse.

- Bestimmen Sie die Richtung v_A der Drehachse, beachten Sie dabei, dass bei einer Drehung die Vektoren der Drehachse dadurch ausgezeichnet sind, dass sie durch die Drehung nicht verändert werden. Es gilt also $Av_a = v_a$. Finden sie den passenden Eigenvektor!
- Bestimmen Sie den Drehwinkel, dazu bestimmen Sie einen zu v_A senkrechten Vektor w und dessen Bild Aw. Der Drehwinkel ist dann den Winkel α zwischen Aw und w.

(*Tipp:* Es gilt $\langle x, y \rangle = |x||y|cos(x, y)$.)

Aufgabe H15 (Offen, abgeschlossen, kompakt) (2 Punkte)

Skizzieren Sie die Menge

$$C \quad = \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\}$$

und geben Sie mit Begründung an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt ist.

Am 12.06. und am 26.06. finden zusätzliche Vorlesungen statt, jeweils um 9.50 Uhr in S103/223!