Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Jennifer Prasiswa

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008
29.05.2008

4. Übung zur „Mathematik II fr Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Eigenwerte)

Sei A die reelle 2×2–Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $B_\lambda = A - \lambda E_2$. Berechne Werte λ_1 und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so daß $\det(B_{\lambda_i}) = 0$.

(b) Finde Vektoren v_1 und v_2, die $V_1 := \ker B_{\lambda_1}$ bzw. $V_2 := \ker B_{\lambda_2}$ erzeugen.

(c) Warum bilden die Vektoren v_1, v_2 eine Basis $\mathcal{B}'$?

(d) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis. Berechne die Matrix dieser Abbildung bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}'$.

Aufgabe G14 (Quadratische Form, Diagonalisierbarkeit)

Mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ist die quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

assoziiert.

(a) Geben Sie die Matrix A an und entscheiden Sie, ob A positiv oder negativ definit ist.

(b) Begründen Sie, warum die Matrix A diagonalähnlich ist und geben Sie eine geeignete invertierbare Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$ an, wobei $D \in \mathbb{R}^{3\times3}$ eine Diagonalmatrix bildet.

Aufgabe G15 (Basiswechsel)

Die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$${}_EM_E(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$) gegeben.
Bestimme die Darstellungsmatrix ${}_BM_B(f)$ von f bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe G16 (Positiv und negativ definit bzw. semidefinit)

Gucken Sie sich Definition 11.21 im Skript an. Welche der folgenden Matrizen sind

(i) positiv definit,

(ii) negativ definit,

(iii) indefinit,

(iv) positiv semidefinit,

(v) negativ semidefinit?

Begründen Sie jeweils und geben Sie im indefiniten Fall Vektoren an, die Ihre Behauptung belegen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H10 (Diagonalisierbarkeit) (4 Punkte)

Gegeben sei die diagonalähnliche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie für jeden Eigenwert einen zugehörigen Eigenvektor an.

(b) Geben Sie eine geeignete Transformationsmatrix an, welche A auf Diagonalgestalt transformiert. Bestimmen Sie hierzu eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $T^{-1} \cdot A \cdot T = D$, wobei D eine Diagonalmatrix bildet.

Aufgabe H11 (Orthonormalbasis) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Stellen sie den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.

Aufgabe H12 (Definitheit) (2 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Geben Sie die Werte von a an, für die die Matrix A positiv definit ist.