

### 3. Übung zur „Mathematik II für Chemiker“

Bitte beachten Sie:  
Die vierte Übung wird wegen des Feiertags auf den 29.5 verlegt!

#### Gruppenübung

##### Aufgabe G9 (Lösbarkeit von Gleichungssystemen)

Gegeben sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ . Beurteilen Sie die folgenden Aussagen über die Lösbarkeit des Gleichungssystems (GS):

$$A \cdot x = b$$

- (GS) ist für alle  $b \in \mathbb{R}^2$  unlösbar.
- (GS) ist nur für spezielle rechte Seiten  $b$  lösbar.
- (GS) besitzt für jede rechte Seite  $b$  genau eine Lösung.
- (GS) besitzt für jede rechte Seite  $b$  viele Lösungen.

##### Aufgabe G10 (Gaußscher Algorithmus)

Bestimmen Sie mittels des Eliminationsverfahrens von Gauß die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & -9 \\ -1 & -5 & 3 & 2 \\ -3 & 24 & 15 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 1 \\ -9 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

##### Aufgabe G11 (Determinanten)

Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

##### Aufgabe G12 (Inverse)

Mittels des Gaußschen Algorithmus lassen sich auch Inverse berechnen, dabei beginnt man mit Matrix und Einheitsmatrix passender Größe, führt solange Zeilentransformationen durch bis man auf der linken Seite die Einheitsmatrix erhält und bekommt dadurch schliesslich die Inverse. Zum Beispiel gilt für die Matrix  $A$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{II+I} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}II} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{I-II} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Daraus folgt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertieren Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie ihr Ergebnis durch Berechnung von  $BB^{-1}$ .

## Hausübung

### Aufgabe H7 (Gaußscher Algorithmus)

(4 Punkte)

Durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wird ein lineares Gleichungssystem der Form  $Ax = b$  beschrieben.

- Bestimmen Sie die Lösung dieses linearen Gleichungssystems mit dem Eliminationsverfahren von Gauß.
- Bestimmen Sie die Determinante der Matrix  $A$ .

### Aufgabe H8 (Determinanten)

(4 Punkte)

Berechnen Sie für jedes  $b \in \mathbb{R}$  die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

### Aufgabe H9 (Inverse)

(4 Punkte)

Berechnen Sie mittels des Gauß-Algorithmuses die Inverse der Matrix  $A$  und bestimmen Sie anschließend die Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$