Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Jennifer Prasiswa

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
24.04.2008

2. Übung zur „Mathematik II für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G5 (Matrizenrechnung)

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = (1 \ \ 1 \ \ 2), \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie bei jeder möglichen Kombination von Matrizen, ob die Summe bzw. das Produkt definiert sind, und berechnen Sie dieses falls möglich, also:
$A+A$, $A+B$, $A+C$, $B+A$, $B+B$, $B+C$, $C+A$, $C+B$, $C+C$,
AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC.

b) Weiter seien

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie auch BD, DB, CF und FC.

c) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Gilt dann immer

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

(Wir schreiben auch bei Matrizen $A^2 := AA$, $A^3 := AAA$, $\ldots$)

Aufgabe G6 (Rang einer Matrix)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A.

b) Ermitteln Sie die Dimension von Kern und Bild der zu A gehörigen linearen Abbildung.

Aufgabe G7 (Lineare Abbildungen und Matrizen)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der linearen Abbildungen, die zu den folgenden Matrizen gehören:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei λ und μ reelle Zahlen sind. Welche geometrische Bedeutung haben diese Abbildungen?

Hinweis: Mit Funktionsgleichungen sind die Gleichungen gemeint, die entstehen, wenn man auf einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ die Matrix A_k, $k = 1, ..., 4$ anwendet. Also:

$$f_k(x) = A_k \cdot x \qquad \text{mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G8 (Spiegelungen)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der x_1-Achse und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden $x_2 = x_1$.

Bestimmen Sie die Matrizen der linearen Abbildungen φ, ψ, $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$. Machen Sie sich geometrisch klar, was die beiden letzten Abbildungen beschreiben.

Hausübung

Aufgabe H4 (Matrizenrechnung) (4 Punkte)

a) Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $(BC) \cdot (-AD + 3D)$.

b) Berechnen Sie die Produkte EF und $E^T F$ für

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H5 (Lineare Gleichungssysteme) (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A und $\mathrm{Rang}(A)$.

b) Untersuchen Sie, ob die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, lösbar sind, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie alle $b \in \mathbb{R}^3$ für die das LGS $Ax = b$ eine Lösung besitzt. (Dazu muss man jetzt nicht mehr rechnen!)

Aufgabe H6 (Rang einer Matrix) (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & a & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit vom Parameter a. Formen Sie dazu die Matrix A mit Hilfe von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen solange um, bis die Matrix nur noch Einträge auf der Hauptdiagonalen besitzt.

b) Ermitteln Sie nun die Dimension von Kern und Bild der zu A gehörigen linearen Abbildung in Abhängigkeit vom Parameter a.