Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Jennifer Prasiswa

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
8.-10.04.2008

1. Übung zur „Mathematik II für Chemiker und LaB“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Abbildungen)

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 + 2a_2 \end{pmatrix}$ linear ist.

(b) Bestimmen und zeichnen Sie $\operatorname{Ker}\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$.

(c) Überprüfen Sie, dass der Dimensionssatzes hier gilt.

Aufgabe G2 (Lineare Abbildungen)

Gegeben sind die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

sowie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren u_1, u_2, u_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Berechnen Sie $\varphi(u_4)$.

(c) Geben Sie einen Vektor u_5 mit $\varphi(u_5) = w$ an.

Hinweis:

zu (b): Geben Sie u_4 als Linearkombination von $u_1, ..., u_3$ an und nutzen Sie dann aus, dass φ eine lineare Abbildung ist.

zu (c): Gehen Sie analog zu Teil (b) vor, d.h. w als Linearkombination der Bilder von $u_1, ..., u_3$ angeben und dann die Eigenschaften einer linearen Abbildung ausnutzen.

Aufgabe G3 (Summe zweier linearer Abbildungen)

Zeigen Sie:
Sind $\varphi, \omega : V \to W$ lineare Abbildungen, so ist ihre *Summe*

$$\varphi + \omega : V \to W, \quad x \mapsto (\varphi + \omega)(x) = \varphi(x) + \omega(x)$$

ebenfalls eine lineare Abbildung.

Aufgabe G4 (Lineare Abbildungen)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$

(b) $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto v + t$ mit $t \in \mathbb{R}^n$, fest

(c) $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u \mapsto \alpha u$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, fest

(d) $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto p(x)$, für beliebige $p \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$

Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildungen!

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare Abbildungen) (4 Punkte)

Zeigen Sie welche der folgenden Abbildung linear sind.

(a) $\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \overline{x}$

(b) $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

(c) $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$

(d) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_2 \\ v_1 + 2v_2 \\ 3v_1 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$

Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildungen!

Aufgabe H2 (Bilder einer Basis als Definition einer linearen Abbildung) (4 Punkte)

Eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\phi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\phi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie den Vektor v mit $\phi(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Auf was wird $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ abgebildet?

(c) Welche Dimension hat der Kern der Abbildung?

Aufgabe H3 (Verkettung zweier linearer Abbildungen) (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie:
Sind $\varphi :\ V \to U$, $\omega :\ U \to W$ lineare Abbildungen, so ist ihre *Verkettung*

$$\omega \circ \varphi :\ V \to W, \quad v \mapsto (\omega \circ \varphi)(v) = \omega(\varphi(v))$$

ebenfalls eine lineare Abbildung.

(b) Es sei nun $\varphi :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.
Finden Sie einfachere Ausdrücke für $\varphi \circ \varphi$ und $\varphi \circ (\varphi \circ (\varphi \circ \varphi))$.
Haben sie eine geometrische Anschauung für φ?
Hinweis: Wenn nötig zeichnen sie einen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und sein Bild.