In diesem Fall heißt T positiv semidefinit ($T \geq 0$)
(strikt positiv definit: $T \gg 0$)

Diskussion:

1.) Positiv semidefinit $\neq$ positive Einträge!
z.B.
$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 \;!$$

2. i.d. Physik: ~~Hami~~ Energien sind positiv
$\Rightarrow$ Hamiltonoperatoren sind positiv (semidefinit).

3. Ana 2:) Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ in $C^2(\Omega)$, dann ist für $x_0 \in \Omega$
$H^f_M(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)$ symmetrische, also s.a. Matrix.
Ist $df(x_0) = 0$ und $H^f(x_0) \gg 0$, dann $f(x_0)$ lokales Minimum, $H^f(x_0) \ll 0 \Rightarrow$ lokales Maximum.

4. Wichtig für quadrat. Form, s.u.

7.13 ~~Zurück zu den Anfängen d. L.A.:~~
Verschiedene Formen.

Def.: Ist V V.R.

i) $s : V \times V \to \mathbb{K} : (x,y) \mapsto s(x,y)$ heißt <u>Sesquilinearform</u>, falls s linear i.d. ersten, antilinear i.d. zweiten Koordinate.
Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so heißt s auch <u>Bilinearform</u>

ii) Ist $s : V \times V \to \mathbb{K}$ Sesquilinearform, so heißt $q_s : V \ni x \mapsto s(x,x)$ die zugehörige <u>quadratische Form</u>.

Bem.: Aus q_s lässt sich s durch Polarisation zurückgewinnen:

$$s(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k q(x+i^k y) \quad \text{über } \mathbb{C}$$

$$s(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) \quad \text{über } \mathbb{R}.$$

Satz: Ist $(V, \langle , \rangle)$ V.R. mit S.P. und s Sesquilinearform. Dann ex. genau eine lin. Abb. $T: V \to V$ mit

$$s(x,y) = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x,y \in V.$$

Bem.: Sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ ONB.
Sei $M_n \ni A = (a_{ij})_{i,j}$ mit $a_{ij} = s(e_j, e_i)$,
dann $A = M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ (7.3.i). (7.10)

$\iff q_s(x) \in \mathbb{R}$

Offenbar ist s hermitesch, d.h. $s(x,y) = \overline{s(y,x)} \iff T = T^*$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: symmetrisch, d.h. $s(x,y) = s(y,x) \iff T = T^T$

positiv, d.h. $q(x) \geq 0 \iff T \geq 0.$

(7.12).

7.14 Das Ganze in Koordinaten:
Zurück zu den Ursprüngen.

Bsp.: Geg. sei ein starrer Körper mit Massen m_k in $\vec{r}_k \in \mathbb{R}^3$, $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$

Die kinetische Energie T ist Summe von T_{trans} (Translation des Schwerpunktes) und T_{rot} von Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
Durch Ausmultiplizieren:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} J_{i,j}\, w_i w_j$$

wo $J_{11} = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2)$
$J_{22} = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2)$
$J_{33} = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2)$
$J_{12} = -\sum_k m_k x_k y_k =$
$J_{21} = -\sum_k m_k y_k x_k = J_{12} \dots$

J_{ii} : Trägheitsmoment bei Drehung um i-Achse
$J_{ij}, i \neq j$: Deviationsmomente:

Aber: Sei $J := \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$, dann $J = J^T$ und
„Trägheitstensor"

$T_{rot} = \frac{1}{2} \langle J w, w \rangle$.

Def: $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \vec{x} \mapsto Q(\vec{x}) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$
mit $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$
heißt reelle symmetrische Quadratische Form.
Also:
$$Q(\vec{x}) = \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle \text{ mit } A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}), \; A = A^T.$$

J_{ii} : ~~Drehmoment~~ Trägheitsmoment bei Drehung um Achse i.
Drehung um Achse i stabil $\Leftrightarrow$ Deviationsmomente in i-ten Zeile/Spalte $= 0$.

Frage: Gibt es stabile Achsen?
Antwort: Es gibt (i.A.) genau drei stabile Achsen, orthogonal zueinander. Man erhält sie ~~durch~~ als Eigenvektoren von J durch Diagonalisierung (7.11).
„Hauptachsen"

$\{ x \in \mathbb{R}^3 : \langle Jx, x \rangle = 1 = \sum J_{ij} x_i x_j \}$
ist Ellipsoid, das Trägheitsellipsoid
Die Eigenvektoren sind die drei Halbachsen des Ellipsoids

Aus 7.11:
Es ex. ONB, in der A diagonal,
$Q(\vec{x}') = \sum_i a'_{ii} x_i'^2$:
Die quadrat. Form besteht nur aus Quadraten.
Die ~~Ei~~ Richtungen der Eigenvektoren heißen auch "Hauptachsen" der quadratischen Form.
Die zugehörige orthogonale Transformation
Hauptachsentransformation:

Hauptachsentransformationen ~~sind~~ transformieren quadratische Formen auf Summen von Quadraten. Sie sind nichts anderes als Transformationen der symm. Matrizen auf Diagonalform.

Anwendung:
$\{\vec{x} : Q(\vec{x}) = 1\}$ ist Hyperfläche.
Falls alle EW > 0: Ellipsoid
Falls EW > 0 u. < 0: Hyperboloid.