6.6 Satz (etwas allgemeiner).
Sei $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$
$\dim E^T_{\lambda_1} = n_1, \dots, \dim E^T_{\lambda_k} = n_k$
$\mathcal{B}_1 := \{v^1_1, \dots, v^1_{n_1}\}$ Basis von $E^T_{\lambda_1}$
$\vdots$
$\mathcal{B}_k := \{v^k_1, \dots, v^k_{n_k}\}$ " " $E^T_{\lambda_k}$.
Dann ist
$\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k = \{v^1_1, \dots, v^1_{n_1}, v^2_1, \dots, v^2_{n_2}, \dots, v^k_{n_k}\}$ lin. unabh.

Bew.: Fast klar:
$$0 = \sum_{ij} \alpha_{ij} v^i_j = \sum_{i=1}^k \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v^i_j}_{\in E^T_{\lambda_i}}\Big)$$
$$\xRightarrow[6.5]{} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v^i_j = 0 \text{ in } E^T_{\lambda_i}$$
$$\xRightarrow[\text{Basis}]{} \alpha_{ij} = 0 \quad \blacksquare$$

6.7 Satz. Äquivalent sind in der Situation von 6.6
a) T ist diagonalisierbar
b) $n_1 + \dots + n_k = n =: \dim V < \infty$ (! vgl. QM)

Bew.: a) $\Rightarrow$ b) klar durch Abzählen.
b) $\Rightarrow$ a) klar.

6.8 Wie findet man Eigenwerte?
Das charakteristische Polynom
Immer: $\dim V = n < \infty$.

Sei $T: V \to V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt offenbar
$$\begin{aligned}
\lambda \text{ EW von } T \quad &\Leftrightarrow \exists x \neq 0 : Tx = \lambda x \\
&\Leftrightarrow \exists x \neq 0 : (T - \lambda \mathbb{1})x = 0 \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(T - \lambda I) < n \\
&\Leftrightarrow \det(T - \lambda I) = 0
\end{aligned}$$

Satz. Sei $T: V \to V$,
1. $p_T : \mathbb{K} \ni \lambda \mapsto p_T(\lambda) := \det(T - \lambda I)$ ist Polynom n-ten Grades.
2. Ist $\mathcal{L}$ irgendeine Basis, $A := M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}}$, dann $p_T = \det(A - \lambda I)$, unabhängig von $\mathcal{L}$.
3. $p_T(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \dots + \alpha_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + \det A$.

Bew.: 2. War nach 5.5.
1 und 3:
$$\det A \underset{5.2.2}{=} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \; \alpha_{1\pi(1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{n\pi(n)}.$$
Daraus erhält man $\det(A - \lambda I)$, indem man alle vorkommenden α_{ii}, $1 \le i \le n$, durch $(\alpha_{ii} - \lambda)$ ersetzt. Damit ist klar:

3.) α) Es gibt genau einen Summand mit n λ:
$(\alpha_{11} - \lambda)(\alpha_{22} - \lambda) \cdots (\alpha_{nn} - \lambda) \rightsquigarrow (-1)^n \lambda^n +$ (kleinere Potenzen von λ)

1.) Jeder Summand hat höchstens n Faktoren mit $\lambda \Rightarrow 1.$)

β) Es gibt n Summanden mit $(n-1)$ λ:
$\alpha_{11}(\alpha_{22} - \lambda) \cdot \dots \cdot (\alpha_{nn} - \lambda) = \alpha_{11}(-1)^{n-1}\lambda^{n} +$ kleinere Potenzen
↖ muss sein!
$(\alpha_{11} - \lambda)\alpha_{22}(\alpha_{33} - \lambda) \cdots (\alpha_{nn} - \lambda) = \alpha_{22}(-1)^{n-1}\lambda^{n} + \dots$

γ) Nach Ausmultiplizieren aller Terme bleiben als Terme ohne λ genau die Summanden von $\det A$. ∎

13.6. **Definition.** $p_T(\lambda)$ heißt das <u>charakteristische Polynom</u> von T.

Offenbar λ EW von $T \Leftrightarrow p_T(\lambda) = 0$ ("Säkulargleichung" in der älteren Physik)
Also $\sigma(T) = \{$Nullstellen von $p_T\}$.

<u>Def.</u>: Ist λ Nullstelle k-ter Ordnung von p_T, so heißt k die <u>algebraische Vielfachheit</u> (AV) des EW λ.
$AV(\lambda)$

Korollare.

1. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ so ex. mindestens eine Nullstelle
2. Hat p_T n verschiedene Nullstellen in $\mathbb{K}$, so ist T diagonalisierbar.
3. Die Zahl $\alpha_{11} + \dots + \alpha_{nn}$ hängt nicht von der Basis $\mathcal{B}$ ab und heißt Spur oder Trace von T bzw. A. Man schreibt z.B. $Sp(A)$, $tr(A)$, etc.

6.5 Beispiele.

1. $T = \mathbb{1} \Rightarrow M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}_{T-\lambda\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-\lambda \end{pmatrix}$ unabh. von $\mathcal{B}$

insbes.: T diagonal in jeder Basis.

$\Rightarrow p_{\mathbb{1}}(\lambda) = (1-\lambda)^n$. $AV(1) = n$

Also: 1 n-fache Nullstelle: algebr. Vielfachheit von $\lambda = n$

geom. $GV(\lambda) = n$ " $1 = n$.

2. $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow p_T(A) = \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \det A$

$\underset{6.8.3}{=} \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det A$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Spiegelung an Diagonalen

$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$

$\Rightarrow \sigma(A) \underset{2.}{=} \{+1, -1\} \underset{6.5}{\Rightarrow} A$ diagonalisierbar.

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (vgl. 6.4.3)

$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 \Rightarrow \sigma(A) = \{0\}$.

Also: aV ?

0 einziger EW, (algebraische Vielfachheit 2) $AV(0) = 2$

geometr. Vielfachheit $= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$GV(0) = 1$

4. $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ (vgl. 6.4.2)

$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\varphi\,\lambda + (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$
$$= \lambda^2 - 2\cos\varphi\cdot\lambda + 1$$

Eigenwerte:

$$p_A(\lambda) = 0: \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(2\cos\varphi \pm \sqrt{4\cos^2\varphi - 4}\right)$$
$$= \cos\varphi \pm \sqrt{-\sin^2\varphi}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\varphi = k\cdot\pi \Rightarrow \cos\varphi = \pm 1$ doppelte Nullstelle
$A = \pm \mathbb{1}$.
$\varphi \neq k\cdot\pi \Rightarrow$ keine EWe in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\sigma(A) = \{\cos\varphi + i\sin\varphi, \cos\varphi - i\sin\varphi\}$.
Für $\varphi = k\pi$ s.o.
Für $\varphi \neq k\pi$: 2 versch. EWe $\Rightarrow$ diagonalisierbar.

6.10 <u>Satz</u>. Sei $T: V \to V$, λ_0 EW von T. Dann gilt:
$GV(\lambda_0) \leq AV(\lambda_0)$ Geometrische Vielfachheit von λ_0 $\leq$ Algebraische Vielfachheit von λ_0.

Bew.: Sei $r :=$ geom. Vielfachheit von λ_0, Sei $\{b_1, \dots, b_r\}$ Basis von $E^T_{\lambda_0}$.
Ergänze zu Basis $\{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n\}$ von V. Dann

$$A := M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & 0 & * \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right) \, r, \text{ also}$$

$$p_T(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 - \lambda & & 0 & * \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_0 - \lambda & \\ \hline & 0 & & A' - \lambda\mathbb{1}_{n-r} \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{Entw. nach 1. Sp.}}{=} (\lambda_0 - \lambda)^r \cdot \det(A' - \lambda\mathbb{1}_{n-r})$$

$\Rightarrow$ algebr. Vielfachheit von $\lambda_0 \geq r$.
$AV(\lambda_0) \geq r = GV(\lambda_0)$.

6.11 Hauptsatz.
Für $T: V \to V$ sind äquiv:

a) T ist diagonalisierbar

b) p_T zerfällt über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren (hat also, mit Vielfachheit, genau n Nullstellen) und für jede Nullstelle λ_0 von p_T gilt: Geom. Vielfachheit = Algebraische Vielfachheit
$gV(\lambda_0) = AV(\lambda_0)$

überspringen

Bew.: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die versch. Nullstellen von p_T mit geometr. Vielfachheit (GVen) $n_1^g, \dots, n_k^g$ und algebr. AVen " $n_1^a, \dots, n_k^a$.

Dann $n_i^g \leq n_i^a$ (6.10) und $n_1^a + \dots + n_k^a \leq n$ (z.B. in $\mathbb{R}$ oft $\lneq$)

Also:

a) $\underset{6.7}{\Longrightarrow}$ $n = n_1^g + \dots + n_k^g \underset{6.10}{\leq} n_1^a + \dots + n_k^a \leq n \Rightarrow$ b)

b) $\Rightarrow$ $n \underset{p_T \text{ zerfällt}}{=} n_1^a + \dots n_k^a = n_1^g + \dots + n_k^g \underset{6.7}{\Longrightarrow}$ a) ∎

6.12 Diagonalisieren.

1. Das Verfahren zur Diagonalisierung von $A = M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$
 α) Berechne p_T
 β) Bestimme Nullstellen von p_T in $\mathbb{K}$, $AV(\lambda)$ für jede Nullstelle.
 Falls p_T in Linearfaktoren zerfällt, dann

oft in einem Schritt

 γ) Bestimme für jede Nullstelle λ
 $GV(\lambda) = \dim \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathbb{1})$
 Falls $GV(\lambda) = AV(\lambda)$ $\forall \lambda \in \sigma(T)$, dann
 δ) Bestimme für jedes $\lambda \in \sigma(T)$ Basis von $\mathrm{Ker}(T - \lambda\mathbb{1})$, d.h., löse homogenes LGS $(T-\lambda)x = 0$ (vgl. 4.12), d.h. bestimme Basis aus EVen (6.3!)
 ε) Falls nötig: Schreibe die Eigenvektoren in die

- Spalten der Transformationsmatrix
  $S = \cancel{M_I^{\mathcal{E},\mathcal{B}}} \cdot M_I^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$

ζ) Zur Sicherheit:

$$\underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E},\ \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E},\ \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}{S^{-1} A S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$

α) + β) vgl. 6.9.3: $\sigma(A) = \{1, -1\}$.

γ)+δ) $\lambda = 1$: $(A - \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(A - \mathbb{1})x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$

$\Rightarrow b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV zum EW 1

$\lambda = -1$: $(A + \mathbb{1})x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$

$\Rightarrow b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV zum EW -1.

$\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$, dann $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ε) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ζ) $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Daumen drücken:

$$S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Uff!

3. $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = M_D^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$, $\varphi \neq k\cdot\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

α) + β): 6.9.4. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: nicht diagonalisierbar.
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\sigma(A) = \{\cos\varphi \pm i\sin\varphi\} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$

γ) + δ): $A - \lambda \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \mp i\sin\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \mp i\cdot\sin\varphi \end{pmatrix} = \sin\varphi \begin{pmatrix} \mp i & 1 \\ -1 & \mp i \end{pmatrix}$

EV_{en}: λ_1: $-ix_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = ix_1$, $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
λ_2: $ix_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -ix_1$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
(normiert, ONB).
(unabhängig von φ!)

$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$

6.13 Jordan-Matrizen

<u>Def.</u> Für $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ heißt die $k\times k$-Matrix

$$J_{\lambda_0} := J_{\lambda_0}^k := \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

eine Jordanmatrix (Camille Jordan, 1838-1922)

α) $P_{J_{\lambda_0}} = \det \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda_0 - \lambda)^k$

Also $\sigma(J_{\lambda_0}) = \{\lambda_0\}$, $aV(\lambda_0) = k$.

β) $\operatorname{Ker}(J_{\lambda_0} - \lambda_0) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow gV = 1$
da Rang $= k-1$.

γ) $E_{\lambda_0}^{J_{\lambda_0}}$:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = x_3 = \dots = x_k = 0$$

Also: $gV(\lambda_0) = 1$, $E_{\lambda_0}^{J_{\lambda_0}}$ wird von EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

Insbes.: Für $k \geq 2$ ist J_{λ_0} nicht diagonalisierbar.

Schlimmer kann es nicht mehr werden:

6.14 Satz (Jordansche Normalform).

Sei $T: V \to V$ lin. Abb., $\dim V = n$

1. Falls $aV(\lambda_0) = n$ d.h. $p_T(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^n$ und $gV(\lambda_0) = 1$, dann ex. Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass

$$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = J_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

2. Falls p_T über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt, also
$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{n_k}$, $n_1 + \dots + n_k = n$,
dann gibt es eine Basis von V, sodass

$$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_k} \end{pmatrix} \leftarrow \text{"Jordansche Normalform"}$$

wo J_i Jordanmatrizen sind.

T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ alle "Jordankästchen" sind 1-dim.

Beweis überspringen

7. Mit Skalarprodukt geht vieles besser.

7.1 Erinnerungen (vgl. 1.12 / 1.13, 2.16 ff.

- Kanonisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$
- Abstraktes Skalarprodukt (2.16 / 2.17), euklid./unit. V.R.
- Cauchy-Schwarz, Norm (2.18/19) ← antilinear, z.B. ∫ H.R.
- Norm bestimmt S.P. / Quadrat. Form (2.20)
- Orthogonalität, Pythagoras (2.21)
- OGS, ONS, ONB (2.21)
- Entwicklung nach ONB (2.22) (z.B. Fourier 2.23)
- Orthogonale Projektion (2.24)
- Ergänzung von ONB mit Gram-Schmidt (2.25)

Weiterhin V, W V.R. über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ mit S.P.
Idee: Winkel in abstrakten V.R. / Funktionen!

7.2 Linearformen.

Satz. Sei V V.R. mit ONB $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$.

i) Ist $x \in V$, dann $x = \sum_i \langle x, e_i\rangle e_i$

ii) $x, y \in V$, dann $x = y \iff \langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle \ \forall z \in V$.
$\iff \langle x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle \ \forall i$

iii) Sei $\varphi : V \to \mathbb{K}$ linear ("Linearform"), dann ex. genau ein $z \in V$ mit
$$\varphi(x) = \langle x, z\rangle \quad \forall x \in V$$

Bew.: i) 2.22

ii) $x = y \Rightarrow \langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle \ \forall z \Rightarrow \langle x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle \ \forall i$
$\Rightarrow x \overset{i)}{=} \sum \langle x, e_i\rangle e_i = \sum \langle y, e_i\rangle e_i \overset{i)}{=} y$

iii) Setze $z := \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(e_i)}\, e_i$, dann für $1 \le k \le n$:
$\langle e_k, z\rangle = \langle e_k, \sum_i \overline{\varphi(e_i)}\, e_i\rangle = \sum_i \varphi(e_i) \langle e_k, e_i\rangle$
$= \varphi(e_i)$.
Eindeutigkeit: aus ii).

Bem.: In der Q.M. sind q.m. Zustände Einheitsvektoren ψ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Man schreibt $|\psi\rangle$.
Eine Linearform φ, induziert durch einen Vektor ξ, wird ~~als~~ geschrieben als $\langle\xi|$.
Dann $\varphi(\psi) = \langle\xi|\psi\rangle$. "Dirac-Schreibweise"
Was ist $|\psi\rangle\langle\xi|$? $\rightsquigarrow$ linear in der 2. Koordinate

7.3 Berechnung von Matrixelementen.

Satz. Sei $S, T: V \to W$ lin. Abb.,
$\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_m\}$ ONB von V
$\mathcal{B}' := \{f_1, \dots, f_n\}$ " " W.
i) Ist $A = M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, dann $a_{ij} = \langle Te_j, f_i\rangle$
ii) $S = T \Leftrightarrow \langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle \; \forall x \in V, y \in W$

Bew.: i) $\langle Te_j, f_i\rangle = \left\langle \left(a \right)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix} j, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix} i \right\rangle$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix} i \right\rangle = a_{ij}$$

ii) klar (i) oder 7.2.ii). ∎

7.4 Die adjungierte Abbildung

Satz. Sei $T: V \to W$ wie oben.
Dann ex. genau eine lin. Abb. $T^*: W \to V$ mit
$$\langle Tx, y\rangle_W = \langle x, T^*y\rangle_V \quad \forall x \in V, y \in W.$$
Sind $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ONBs wie oben und ist $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = A$, dann ist
$$M_{T^*}^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \overline{A}^{T \,\leftarrow \text{transpon.}} = \begin{pmatrix}\overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \cdots \\ \overline{a}_{12} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} =: A^*$$

T^* heißt die zu T adjungierte Abbildung
A^* " " " A " Matrix.

Bew.: Eindeutigkeit klar nach ~~4.2.ii)~~ 7.2.ii)
Existenz: Sei $A := M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Setze $A^* := \bar{A}^T$.
Dann $\exists!\ T^* : W \to V$ mit $M_{T^*}^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = A^*$ und es ist

$$\langle e_j, T^* f_i \rangle = \left\langle j\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \bar{\alpha}_{21} & \\ \bar{\alpha}_{12} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} i \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{i1} \\ \bar{\alpha}_{i2} \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_{in} \end{pmatrix} \right\rangle = \bar{\bar{\alpha}}_{ij} = \alpha_{ij}$$

$$\overset{7.3.ii)}{=} \langle T e_j, f_i \rangle$$

7.5 Beispiele.
In kanonischen Koordinaten:

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($\hat{=}$ Spiegelung), $A^* = A$ (s.a.)

$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = A$ (s.a.)

$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = -A$

iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$

iv) ist $P : V \to V$ orthog. Projektion, dann ist $P^* = P$ (s.a.):
$V_0 = PV$, $x \in V$, $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in V_0$, $x_1 \in V_0^\perp$,
vgl. A.2 dann $y \in V$ $\quad y_0 + y_1 \quad y_0 \quad y_1$
$\langle Px, y \rangle = \langle x_0, y_0 + y_1 \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle = \langle x, y_0 \rangle = \langle x, Py \rangle$.

iv) Ist $\mathcal{B}$ ONB von V,
$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, dann $M_{T^*}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$.

also: $T = T^* \Leftrightarrow$ alle EWe reell
$T^* = T^{-1} \Leftrightarrow$ alle EWe haben Betrag 1.

7.6 Eigenschaften der Adjungierten.

$T: V \to W$

<u>Satz</u>: Falls die betrachteten Ausdrücke sinnvoll sind, gilt:

1. $\langle T^* x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \ \forall x, y, \ (T^*)^* = T$
2. $(S+T)^* = S^* + T^*$
3. $(\alpha S)^* = \bar{\alpha} S^*$
4. $(ST)^* = T^* S^*$
5. $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Bild} T^*)^\perp$, $\operatorname{Bild} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$
6. $\operatorname{Rang} T = \operatorname{Rang} T^*$

Falls T Endomorphismus, dann

7. $\det(T^*) = \overline{\det(T)}$
8. $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$

Bew.: Beachte immer <u>7.3. ii</u>! : $\forall x, y$ gilt

1. $\langle T^* x, y\rangle = \langle y, T^* x\rangle = \langle Ty, x\rangle = \langle x, Ty\rangle$, also
$\langle T^{**} x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle$.

2. $\langle x, (S+T)^* y\rangle = \langle (S+T)x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle$
$= \langle x, S^* y\rangle + \langle x, T^* y\rangle$
$= \langle x, (S^* + T^*) y\rangle$.

ü 3. $\langle x, (\alpha S)^* y\rangle = \langle (\alpha S)x, y\rangle = \alpha\langle Sx, y\rangle = \alpha\langle x, S^* y\rangle$
$= \langle x, \bar{\alpha} S^* y\rangle$.

ü 5. $x \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow \forall y \in W: \langle Tx, y\rangle = 0$
$\Leftrightarrow \forall y \in W: \langle x, T^* y\rangle = 0$
$\Leftrightarrow x \perp \operatorname{Bild} T^*$

ü 4. $\langle x, (ST)^* y\rangle = \langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^* y\rangle = \langle x, T^* S^* y\rangle$

6. Aus 5. mit Dimensionsformel:
$\operatorname{Rang} T = \dim V - \dim \operatorname{Ker} T$
$\overset{5.}{=} \dim V - \dim (\operatorname{Bild} T^*)^\perp$
$= \dim V - (\dim V - \dim \operatorname{Bild} T^*)$
$= \dim \operatorname{Bild} T^*$
$= \operatorname{Rang} T^*$

7. Sei $A = M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, dann
$\det T^* = \det(\bar{A}^T) \underset{\substack{5.3\\ Dg}}{=} \det \bar{A} \underset{5.8.2}{=} \overline{\det A}$

8. $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \det(T-\lambda 1) = 0$
$\Leftrightarrow 0 = \overline{\det(T-\lambda 1)} \underset{7.}{=} \det(T^* - \bar{\lambda} 1)$
$\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

77 Am schönsten sind die normalen linearen Abbildungen.

Def.: $T: V \to V$ heißt <u>normal</u>, falls $TT^* = T^*T$

Bsp.: Ist $T = T^*$ oder $T^* = T^{-1}$, dann ist T normal.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht normal

<u>Hauptsatz</u> (wichtigster Satz der L. A. (?)). Sei V <u>komplexer</u> V.R.
Für $T: V \to V$ sind äquivalent
a) T besitzt ONB aus Eigenvektoren
b) T ist normal.
Also insbes.: T normal, z.B. s.A. $\Rightarrow T$ diagonalisierbar und EVen zu verschiedenen EWen sind orthogonal.

Bew.: a) $\Rightarrow$ b) "klar":
Sei $\mathcal{B}$ ONB aus EVen für T, dann
$$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: A, \quad M_{T^*}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} \underset{7.4}{=} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = A^*$$
$\Rightarrow A \cdot A^* = A^* A \Rightarrow TT^* = T^*T$.

b) $\Rightarrow$ a) Beh. 1: T normal, $Te = \lambda e \;(0 \neq e \in V) \Rightarrow T^*e = \bar{\lambda} e$
Bew.: α) $\lambda = 0$, dann $\|T^*e\|^2 = \langle T^*e, T^*e \rangle = \langle e, TT^*e \rangle$
$\underset{\text{Vor.}}{=} \langle e, T^*Te \rangle = 0$
β) λ beliebig, T normal $\Rightarrow (T-\lambda 1)$ normal, also
$(T-\lambda 1)e = 0 \underset{\alpha)}{\Rightarrow} (T-\lambda 1)^* e = 0 \Rightarrow T^*e = \bar{\lambda} e$.

(Bem.: Auch für T nicht normal gilt immer noch $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \bar\lambda \in \sigma(T^*)$ (7.6.8), aber dann ändern sich die EVen).

Beh. 2 T normal, $Te = \lambda e$, $W := e^\perp$, dann $T(W) \subseteq W$, und $T^*(W) \subseteq W$.

Bew.: OBdA: $\lambda \neq 0$ (ersetze T durch $T + 1\!\!1$).
$w \in W = e^\perp$, dann

$$\langle e, T(w)\rangle = \langle T^* e, w\rangle \underset{\text{Beh. 1}}{=} \bar\lambda \langle e, w\rangle = 0 \Rightarrow T(w) \in e^\perp$$
$$\langle e, T^*(w)\rangle = \langle Te, w\rangle = \lambda\langle e, w\rangle = 0 \Rightarrow T^*(w) \in e^\perp.$$

Bew. von b) $\Rightarrow$ a) durch vollständige Induktion nach $n = \dim V$:
$n = 1$ Beh. klar
Beh. sei bewiesen für $\dim V = n-1$.
Sei $\dim V = n$. 6.8: $\exists$ EV e_1 für T ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$!)
OBdA: $\|e_1\| = 1$.
Sei $W = e_1^\perp$, dann $\dim W = n-1$ und wegen Beh. 2 ist $T|_W$ normal.
Induktionsannahme $\Rightarrow$ es ex. ONB $\{e_2, \dots, e_n\}$ aus EV für $T|_W$. Also
$\{e_1, \dots, e_n\}$ ist ONB aus EVen für T.

Mit diesen Abb. lässt sich es rechnen:
Sei $f : \mathbb{C} \supseteq \sigma(T) \to \mathbb{C}$ irgendeine Funktion,
T normal, $STS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonal

Dann $f(T) := S^{-1} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} S$

Wichtigste Spezialfälle:

$A = A^*$, d.h., A s.a.

$T^* T = \mathbb{1} = T T^*$, d.h., A unitär.

Betrachten diese Fälle jetzt genauer:

7.8 Unitäre u. orthogonale lin. Abb.

Sei $T: V \to V$ mit $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V$,
d.h., T winkelerhaltend. $(\dim V < \infty)$.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: T heißt unitär

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: T heißt auch orthogonal.

<u>Hauptsatz</u>. Sei V komplexer V.R.. Für $T: V \to V$ sind äquiv:

a) T ist unitär

b) T ist isometrisch, d.h., $\|Tu\| = \|u\| \quad \forall u \in V$.

c) T ist invertierbar u. $T^{-1} = T^*$, also $T^* T = \mathbb{1}$ $(= T T^*)$

d) T ist normal und $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$

e) T transformiert ONBs in ONBs

f) Es ex. ONB $\mathcal{B}$, sodass die Spalten von $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine ONB bilden.

g) Für jede ONB $\mathcal{B}$ bilden die Spalten von $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine ONB.

Bew.: a) $\Leftrightarrow$ b) : Polarisation, 2.20.

a) $\Rightarrow$ c) $\forall u, v$:

$$\langle u, v \rangle \underset{a)}{=} \langle Tu, Tv \rangle = \langle T^* T u, v \rangle$$

$$\underset{7.3.\, iii)}{\Rightarrow} \mathbb{1} = T^* T \Rightarrow T^* = T^{-1}$$

c) $\Rightarrow$ d): c) : $T^* T = T^{-1} T = \mathbb{1} = T T^{-1} = T T^* \Rightarrow T$ normal

$\Rightarrow$ OBdA $A = M_T$ diagonal $\Rightarrow \forall \lambda \in \sigma(T): \lambda^{-1} = \bar{\lambda} \Rightarrow$ d).

d) $\Rightarrow$ a) klar in Diagonalform.

a) ⇒ e) $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ ONB, dann
$\langle Te_i, Te_j \rangle \underset{a)}{=} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$, also
$\{Te_1, \dots, Te_n\}$ ONB
e) ⇒ g) $\mathcal{B}$ ONB ⇒ in den Spalten von $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$
stehen die Bilder der Basisvektoren, also ONB
g) ⇒ f) ✓
f) ⇒ c) = 3.20.

7.9 Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Satz / Bew.: Bzgl. irgendeiner ONB $\mathcal{B}$ betrachte $O := M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
orthog. Matrix.
$\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$, also O diagonalisierbar auf $\mathbb{C}^n$.

α) Sei $Ox = 1 \cdot x$, da O reell, ist $O\bar{x} = \overline{Ox} = \overline{1x} = 1 \cdot \bar{x}$.
Also: $E_1^O = \overline{E_1^O}$.
Entweder $\bar{x}$ lin. abh. von x ⇒ $\bar{x} = e^{i\varphi} x$

h.A. 2

⇒ $e^{-i\frac{\varphi}{2}} x = e^{-i\frac{\varphi}{2}} \bar{x} = e^{i\frac{\varphi}{2}} x \in \mathbb{R}^n$ EV zum EV 1
Oder $\{\bar{x}, x\}$ lin. unabh. ⇒ $\operatorname{Re} x := \frac{1}{2}(x + \bar{x}) \neq 0$
$\operatorname{Im} x := \frac{x - \bar{x}}{2i} \neq 0$
lin. unabh. EVen zum EW 1
Gram Schmidt: $\exists\, e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n$, $e_1 \perp e_2$, $\|e_1\| = 1 = \|e_2\|$
mit $LH_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\} = LH_{\mathbb{R}}\{\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x\}$.
Genauso für EW -1.

β) Sei $Ox = e^{i\varphi} x$, $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\|x\| = 1$.
O reell ⇒ $O\bar{x} = \overline{Ox} = \overline{e^{i\varphi} x} = e^{-i\varphi} \bar{x}$, $\|\bar{x}\| = 1$.
7.7 ⇒ $x \perp \bar{x}$. Sei $V_\varphi := LH\{x, \bar{x}\}$, $O_\varphi := O|_{V_\varphi} \cong \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$
⇒ $e_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \bar{x})$ Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$
$e_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x - \bar{x}}{i}\right)$ " " $\mathbb{R}^n$
$e_1 \perp e_2$.

$$M_{O_\varphi}^{\{e_1,e_2\},\{e_1,e_2\}} \underset{6.12.3}{=} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =: D_\varphi.$$

Also: Satz: Ist V reell und T orthogonal, dann ex. ONB $\mathfrak{b}$ von V, sodass

$$M_T^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} = \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && -1 &&& \\ &&& \boxed{D_{\varphi_1}} && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& \boxed{D_{\varphi_k}} \end{pmatrix} \qquad (d').$$

Bem.: Also für V reellen V.R. sind a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) $\Leftrightarrow$ d') $\Leftrightarrow$ e) $\Leftrightarrow$ f $\Leftrightarrow$ g.

Insbes.: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ orthogonal $\Rightarrow \exists$ ONB $\mathfrak{b}$ mit $M_T^{\mathfrak{b}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Achtung: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ ist eine Spiegelung, fällt unter 1. Fall.

7.10 Selbstadjungierte lin. Abbildungen

Hauptsatz. Sei V komplexer V.R. Für $T: V \to V$ sind äquivalent

a) T ist s.a. (a) In ONB: $M_T^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} = \overline{M_T^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}}^T$ (7.4)

b) T ist normal und $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

c) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \ \forall x \in V$. (nur über $\mathbb{C}$ interessant!!)

Bew.: a) $\Rightarrow T$ normal $\underset{7.7}{\Rightarrow} \exists$ ONB $\mathfrak{b}$: $M_T^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \underset{7.5(iv)}{\Rightarrow}$ b)

b) $\Rightarrow$ c): Wähle ONB aus EVen

c) $\Rightarrow$ a) Sei bzgl. ONB $\mathfrak{b} = (e_1, \dots, e_n)$ $A = M_T^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$. z.z.: $A = \overline{A}^T$,

also $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$.

α) $\alpha_{ii} = \langle Ae_i, e_i \rangle \underset{c)}{=} \overline{\langle Ae_i, e_i \rangle} = \overline{\alpha_{ii}}$

β) $i \neq j$. OBdA: $i = 1, j = 2$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$.

Dann $\langle A\binom{1}{1}, \binom{1}{1} \rangle = \alpha + \beta + \gamma + \delta \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta + \gamma \in \mathbb{R}$

$\langle A\binom{1}{i}, \binom{1}{i} \rangle = \langle \binom{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta}, \binom{1}{i} \rangle = \alpha + i\beta - i\gamma + \delta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow i(\beta - \gamma) \in \mathbb{R}$

$\beta - \gamma \in i\mathbb{R}$

Aufg.

$\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, dann
$\beta + \gamma = (\beta_1+\gamma_1) + i(\beta_2+\gamma_2) \in \mathbb{R} \Rightarrow \gamma_2 = -\beta_2$
$\beta - \gamma = (\beta_1-\gamma_1) + i(\beta_2-\gamma_2) \in i\mathbb{R} \Rightarrow \beta_1 = \gamma_1$,
Also $\gamma = \beta_1 - i\beta_2 = \overline{\beta}$.

7.11 Der reelle Fall:

Satz: Sei V reell, $T: V \to V$ s.a., dann ex. ONB von V mit $M_T^{B,B}$ diagonal

Bew.: Sei B eine Basis von V, $A = M_T^{B,B}$, symmetrisch.
Nach 7.7 ex. ONB aus EV für A in $\mathbb{C}^n$ (!).
Aber A, λ reell. Also:
$Ax = \lambda x$ für $x \in \mathbb{C}^n$
$\Rightarrow A\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \lambda \overline{x}$, also:
~~$x \in \mathbb{C}^n$ EV von A zum EW λ~~
$\Rightarrow \operatorname{Re} x := \frac{x+\overline{x}}{2}$, $\operatorname{Im} x := \frac{x-\overline{x}}{2i}$ $\in \mathbb{R}^n$ EVen von A zum EW λ.
Offenbar: $\{x, \overline{x}\}$ lin. unabh. $\Leftrightarrow$ $\{\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x\}$ lin. unabh.
bzw: $LH_{\mathbb{C}}\{x, \overline{x}\} = LH_{\mathbb{C}}\{\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x\}$
Durch Orthonormalisieren folgt Beh. $\square$

7.12 Positive lin. Abb.

Satz: Für $T: V \to V$ sind äquiv
a) $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ $(\gneq 0)$ $\forall\, 0 \neq x \in V$
b) T s.a. und $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$
c) $\exists\, S$ (invertierbar) : $T = S^d S$

Bew.: a) $\underset{7.10.c}{\Rightarrow}$ T s.a.. Ist $\lambda_0 < 0$ EW mit EV x_0, dann ist $\langle Tx_0, x_0\rangle = \lambda_0 \|x_0\|^2 \leq 0$ ↯ $\Rightarrow$ b).
b) $\Rightarrow$ c): $S := \sqrt{T}$ (das geht, da alle EWe ≥ 0!
c) $\Rightarrow$ a) $\forall x$: $\langle Tx, x\rangle = \langle S^d S x, x\rangle = \langle Sx, Sx\rangle \geq 0$
$\gneq 0$ falls S invertierb.