5. Determinanten

5.1 Erinnerung und Motivation

$\vec{a} = (a_1, a_2)^T$, $\vec{b} = (b_1, b_2)^T \in \mathbb{R}^2$.

Sei $F(\vec{a}, \vec{b})$ die orientierte Fläche des von $\vec{a}$ u. $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. (vgl. 1.16, 1.19)

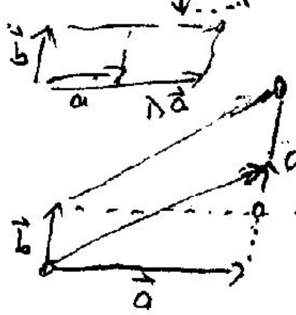
Also $F(\ldots) \geq 0$, $\quad F(\ldots) \leq 0$.
$= F(\ldots)$, vgl. Integral ... $= - \ldots$!

Eigenschaften:

ii) $F(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda F(\vec{a}, \vec{b})$:

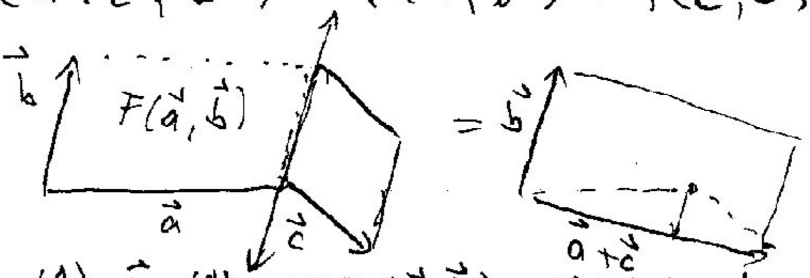
i) $F(\lambda \vec{b}, \vec{b}) = 0$:

iii) $F(\vec{a} + \lambda \vec{b}, \vec{b}) = F(\vec{a}, \vec{b})$: "Scherung".



Sogar:

iv) $F(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) = F(\vec{a}, \vec{b}) + F(\vec{c}, \vec{b})$:



v) $\vec{a} = \binom{1}{0}$, $\vec{b} = \binom{0}{1} \Rightarrow F(\vec{a}, \vec{b}) = F(\square) = 1$.

Aus 1.19:

$$F(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1, \text{ falls } \vec{a} = \binom{a_1}{a_2}, \ \vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$$

Wollen analog Volumen des von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ im $\mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelepipeds bestimmen.

5.2 Determinanten

Seien $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$, fasse $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ als Zeilenvektoren der Matrix $A := \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \in M_{n,n} \underset{\text{V.R.}}{\cong} \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n$ auf.

Def.: Eine Abbildung

$$\det : M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} : A \mapsto \det A =: |A|$$

heißt eine Determinante, falls gilt:

$$= \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

(D1) det ist linear in den Zeilenvektoren, d.h.,

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \alpha \vec{a}_k + \beta \vec{b}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} + \beta \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_k \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}.$$

(vgl. 5.1.ii, iii, iv)

Insbes.: Ist eine Zeile $= 0$, so ist $\det A = 0$

auf $M_{2\times 2}$: $\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 + \vec{b}_1 \\ \vec{a}_2 + \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Also $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$!

(D2) det ist "n-dimensional":
Sind zwei Zeilenvektoren gleich, so ist $\det A = 0$.
(vgl. i) (heißt auch manchmal "alternierend")

(D3) det ist normiert: $\det(\mathbb{1}_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$
(vgl. 5.1.v).

Bem.: det kann also auch als normierte, n-dimensionale, n-Linearform $\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ aufgefaßt werden (vgl. 1.18)

5.3 Weitere Eigenschaften von Determinanten.

Satz: Sei $\det : M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Determinante, dann gilt:

(D4) Bei EZUen vom Typ II ändert sich die Determinante nicht

(D5) Eine Determinante ändert bei Vertauschung zweier Zeilen das Vorzeichen, d.h., sie ist <u>alternierend</u>

(D6) Ist A eine obere Dreiecksmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \text{ dann ist}$$

$$\det A = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nn}$$

(D7) $\det A = 0 \iff \operatorname{Rang} A < n$
$\iff A$ nicht invertierbar
$\iff$ Zeilen/Spalten sind linear abh.

(D8) Für $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt
$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
(<u>Multiplikationssatz</u>).
Insbesondere:
$\det A^n = (\det A)^n$
$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(B \cdot A)$
Falls A invertierbar, dann $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
Falls S invertierbar, dann $\det(S^{-1} A S) = \det A$.

(D9) $\det A = \det(A^T)$: Somit:
det verhält sich in Bezug auf die Spalten wie in Bezug auf die Zeilen; insbes. ist det linear in den Spalten und ändert sich nicht bei ESUen vom Typ II.

Korollar: Es gibt höchstens eine Determinante. (Existenz noch nicht klar)

Bew.: Bringe A mit D4 durch EZUen auf ZSF und benütze D6.
(Analog. vom Verfahren 2?)

Beweis des Satzes:

(D4) $\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \vec{a}_i\\ \vdots\\ a_k+\lambda a_i\\ \vdots\end{pmatrix} \underset{D1}{=} \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_i\\ \vdots\end{pmatrix} \underset{(D2)}{=} \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix}$

(D5) $\det\begin{pmatrix}a_i\\ a_k\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}a_k\\ a_i\end{pmatrix} \underset{D2}{=} \det\begin{pmatrix}a_i\\ a_i\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}a_i\\ a_k\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}a_k\\ a_i\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}a_k\\ a_k\end{pmatrix}$

$\underset{D1}{=} \det\begin{pmatrix}a_i\\ a_i+a_k\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}a_k\\ a_i+a_k\end{pmatrix} \underset{D1}{=} \det\begin{pmatrix}a_i+a_k\\ a_i+a_k\end{pmatrix} \underset{D2}{=} 0$

Schreibe nur Zeile i u. Zeile k:

(D6) A nicht invertierbar $\underset{4.6.2}{\Longrightarrow} \alpha_{nn}=0 \underset{D1}{\Longrightarrow} \det A = 0 = \alpha_{11}\cdots\alpha_{nn}$.

A invertierbar $\underset{4.6.2}{\Longrightarrow} A \underset{EZU_{II}}{\sim} \begin{pmatrix}\alpha_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn}\end{pmatrix} =: A'$, also

$\det A \underset{D4}{=} \det A' \underset{D1}{=} \alpha_{11}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \alpha_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \underset{D2}{=} \alpha_{11}\alpha_{22}\det\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \alpha_{33} & \\ & & & \ddots\ \alpha_{nn}\end{pmatrix}$

$\underset{D2}{=} \cdots \underset{D2}{=} \alpha_{11}\cdots\alpha_{nn}\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix} \underset{D3}{=} \alpha_{11}\cdots\alpha_{nn}$.

(D7) Bringe A durch EZUen vom Typ II auf ZSF A' (Satz 4.6.1). Dann

$\det A = 0 \underset{D4}{\Longleftrightarrow} \det A' = 0 \underset{D6}{\Longleftrightarrow} \alpha_{nn} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Rang} A' < n$

$\Longleftrightarrow \operatorname{Rang} A < 0$.

(D8) α) A nicht invertierbar $\Rightarrow A\cdot B$ nicht invertierbar

$\Rightarrow \det A\cdot B \underset{D7}{=} 0 = 0\cdot\det B \underset{D7}{=} \det A\cdot\det B$.

β) A invertierbar.

i) $A = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$, dann

$$\det A\cdot B = \det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_{11} & \cdots & \beta_{1n}\\ \vdots & & \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn}\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix}\alpha_{11}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{1n}\\ \vdots & & \\ \alpha_{nn}\beta_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\beta_{nn}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\alpha_{11}\vec{b}_1\\ \vdots\\ \alpha_{nn}\vec{b}_n\end{pmatrix}$$

$$\underset{D1}{=} \alpha_{11}\det\begin{pmatrix}\vec{b}_1\\ \alpha_{22}b_2\\ \vdots\\ \alpha_{nn}b_n\end{pmatrix} = \cdots = \alpha_{11}\cdots\alpha_{nn}\det B$$

$$\underset{D6}{=} \det A\cdot\det B.$$

ii) Nach D4 gilt:
Ist S ein Produkt von Matrizen vom Typ S_{II} (vgl. 4.3.3), dann ist $\det(S\cdot C) = \det(C)$ (*) für jede Matrix C.
Ist A invertierbar, dann ex. solches S mit
$SA = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} =: A'$ (Satz 4.6.2).

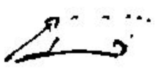
Also:
$$\det(A\cdot B) \underset{(*)}{=} \det(S\cdot AB) = \det(SA\cdot B) = \det(A'\cdot B)$$
$$\underset{i)}{=} \det(A')\det B = \det(SA)\det B \underset{(*)}{=} \det A\cdot\det B.$$

(D9) Mit 4.7 ist Rang A = Rang A^T, also stimmt die Beh., falls A nicht invertierbar (D7).
Ist A invertierbar, dann
$A \underset{EZUm}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ (Satz 4.6.2), also
$A = S_1 \cdots S_k$, wo S_i Elementarmatrizen vom Typ $S_I = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ oder $S_{II} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & \lambda & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underset{EZU}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Offenbar ist $S_I = S_I^T$ und
$\det S_{II} \underset{EZU_{II}}{=} 1 \underset{D6}{=} \det S_{II}^T$. Also

$$\det A^T = \det((S_1 \cdots S_k)^T) = \det(S_k^T \cdots S_1^T)$$
$$\underset{D8}{=} \det(S_k^T) \cdots \det(S_1^T) = \det(S_k) \cdots \det(S_1)$$
$$= \det S_1 \cdot \ldots \cdot \det S_k \underset{D8}{=} \det(S_1 \cdots S_k) = \det A.$$
∎

5.4 Geometrische Interpretation.

Seien $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$.
Das von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ aufgespannte Parallelepiped ist definiert als $\{\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n : 0 \le \lambda_i \le 1 \text{ für } 1 \le i \le n\}$.
 (vgl. Parallelogramm, Spat)

Sei $A := \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$, dann ist $\det A =$

Beh.: $\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$ gleich dem Volumen $V(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ des von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ aufgespannten Parallelepipeds.

Bew.: Falls $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ lin. abh. $\underset{D7}{\Rightarrow}$ Beh.
Falls lin. unabh. $\Longrightarrow$ A invertierbar

$$\underset{4.6.2}{\Longleftrightarrow} A \underset{EZU_{II}}{\widetilde{}} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}' \\ \vdots \\ \vec{a}_n{}' \end{pmatrix} =: A', \quad \alpha_{ii} \neq 0.$$

EZU_{II} entsprechen Scherungen des aufgespannten Parallelepipeds, ändern also nicht das Volumen.
Also gilt:

$$V(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = V(\vec{a}_1{}', \dots, \vec{a}_n{}') \underset{\text{ander}}{=} \alpha_{11} \cdot \dots \cdot \alpha_{nn} \underset{D6}{=} \det(A') \underset{D4}{=} \det(A).$$

5.5 Die Determinante eines Endomorphismus / linearer Abb.

Sei $T: V \to V$ lineare Abbildung, "Endomorphismus".
$\mathcal{B}$ Basis von V, $A := M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$
$\mathcal{B}'$ weitere Basis von V, $A' := M_T^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$.
Ist $S = M_{id}^{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ Transf.-Matrix, dann ist also
$A' = M_T^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = S A S^{-1}$, also
$\det A' \underset{D8}{=} \det A$.

Also: Die Determinante einer Matrix von $T: V \to V$ hängt nicht von der gewählten Basis ab und heißt die <u>Determinante $\det(T)$</u> von T.

5.6 Geometrische Interpretation von det T.

<u>Satz</u>: Sei $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann gilt für $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$:

$$V(T\vec{a}_1, \dots, T\vec{a}_n) = \det(T) \cdot V(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

Bew.: [unnötig 1. Falls $\vec{a}_i$ kanon. Basisvektoren von $\mathbb{R}^n$, dann $V(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n) = 1$ (Einheitswürfel) und mit $A = M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$ kanon. Basis, gilt
$$\det(T) \underset{5.5}{=} \det(A) \underset{DS}{=} \det(A^T) = \det\begin{pmatrix} T(\vec{a}_1) \\ \vdots \\ T(\vec{a}_n) \end{pmatrix}]$$

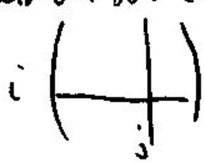
. Falls $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$ lin. abhängig, ist $V(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n) = 0 = V(T\vec{a}_1,\dots,T\vec{a}_n)$
$\Rightarrow$ Beh.
Sei $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n\}$ lin. unabh., also Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$, sei $\mathcal{E}$ die kanonische Basis. Dann gilt:

$$V(T(\vec{a}_1),\dots,T(\vec{a}_n)) \underset{5.4}{=} \det\begin{pmatrix} T\vec{a}_1 \\ \vdots \\ T\vec{a}_n \end{pmatrix} \underset{(DS)}{=} \det\left(\begin{pmatrix} T\vec{a}_1 \\ \vdots \\ T\vec{a}_n \end{pmatrix}^T\right)$$
$$= \det\left(M_T^{\mathcal{B},\mathcal{E}}\right) = \det\left(M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot M_{id}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}\right)$$
$$\underset{D8}{=} \det\left(M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}}\right) \cdot \det\left(M_{id}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}\right) \underset{5.5}{=} \det(T) \cdot \det(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)$$
$$\underset{DS}{=} \det T \cdot \det\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \det T \cdot V(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n). \blacksquare$$

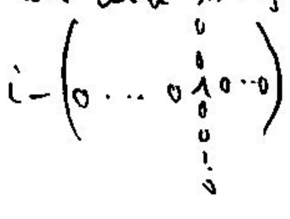
5.7 Technisches Hilfsmittel: Vereinfachung von Matrizen.

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in M_n$. Dann entsteht aus A

$A_{ij} \in M_{n-1}$ durch Streichen der i-ten Zeile u. j-ten Spalte.



$\tilde{A}_{ij} \in M_n$ durch Ersetzen von α_{ij} durch 1 und den Rest der i-ten Zeile u. j-ten Spalte durch 0:



$\hat{A}_{ij} \in M_n$ durch Ersetzen von α_{ij} durch 1 und den Rest der i-ten Zeile durch 0:

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} & & \\ 0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0 \\ & & \end{pmatrix}$$
$$\qquad\qquad j$$

<u>Lemma</u>: $\det \hat{A}_{ij} = \det \tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Bew.: $\hat{A}_{ij} \underset{EZU_{II}}{\sim} \tilde{A}_{ij}$, also $\det \hat{A}_{ij} = \det \tilde{A}_{ij}$ (D4).
Offenbar ist Rang A_{ij} = Rang $\tilde{A}_{ij} - 1$, also
$\det A_{ij} = 0 \Leftrightarrow \det \tilde{A}_{ij} = 0$, in diesem Fall Beh. wahr.
Sei $\det A_{ij} \neq 0$.
Bringe in $\tilde{A}_{ij}$ durch $|i-j|$ Vertauschungen benachbarter Zeilen die 1 in die Diagonale $^{(j,j)}$: $\tilde{A}_{ij} \underset{EZU_{III}}{\sim} \tilde{A}'_{ij}$,
also
gerade oder ungerade
$\det \tilde{A}_{ij} \underset{D5}{=} (-1)^{|i-j|} \det \tilde{A}'_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}'_{ij}$.

$$A_{ij} \underset{EZU_{II}}{\sim} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \in M_{n-1}$$

Führe dieselben EZU_{II} an $\tilde{A}'_{ij}$ durch unter Auslassung der j-ten Zeile, dann

$$\tilde{A}'_{ij} \underset{EZU_{II}}{\sim} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \gamma_{j-1,j-1} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \gamma_{j,j} & \\ 0 & & & & & \ddots \ \gamma_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \in M_n.$$

Aus (D6): $\det(A_{ij}) = \det \tilde{A}'_{ij}$ (wegen (D4)). ∎

5.8 Berechnung der Determinante

<u>Satz</u>. 1. Für jedes i gilt:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile. Laplacescher Entwicklungssatz)

2. $\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, \alpha_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\pi(n)}$

Bew.: 1. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \det(\hat{A}_{ij})$.
Da det linear in der i-ten Zeile, folgt Beh. aus 5.7
2. z.B. mit vollständiger Induktion aus 1.

5.9 <u>Korollar</u>: Die Determinante gibt es tatsächlich.

Beweis: Längeres induktives Betrachten von 2.
(Man muss nur (D1), (D2), (D3) verifizieren:
D3 klar, D2: Jeder Summand erscheint 2-mal mit unterschiedlichen Vorzeichen. D1 eigentlich klar.)

5.10 Berechnung von Determinanten

1. $n=1$: $A=(\alpha)$, $\det A = \alpha$.

2. $n=2$: $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$;

$$\overset{5.8.1}{\Longrightarrow} \det A = \alpha_{11} \det(\alpha_{22}) - \alpha_{12} \det(\alpha_{21})$$

Entwickl. nach 1-Zeile. $= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$

Interpretation: vgl. 5.1.

3. $n=3$: $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$

Wieder Entwicklung nach der 1. Zeile, vgl. 5.8.1:

$$\det A = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

$$\underset{2.}{=} \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}$$
$$- \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}$$
$$+ \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} \quad \text{(vgl. 5.8.2!)}$$

Merkregel (Sarrus'sche Regel):
(Pierre Sarrus, 1798-1861).

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \searrow & + \\ \nearrow & - \end{array}$$

Gilt aber <u>nur</u> für $n=3$!!

Interpretation: $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, dann

$\det A = \langle \vec{a}_1 \times \vec{a}_2, a_3 \rangle$
$= $ Volumen des von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ aufgespannten Spats.
(vgl.)

4. n allgemein: Bringe auf Zeilenstufenform und benütze (D6) oder benutze Entwicklungssatz.
Beachte Vorzeichenschema = Schachbrettmuster

$$(-1)^{i+j}: \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}$$

Bsp.: $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 1 = -6.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} 2- = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{3.\,\text{Spalte}}{=} -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \leftarrow -2 + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -6 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{-1 \cdot 1 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}}_{1.\,\text{Spalte}} + \underbrace{3 \cdot (-6 + 0 - 6 - (4) + 0 - 18)}_{\text{Sarrus}}$$

$$= -1\,(6 - 12) + 3 \cdot (-26)$$

$$= 6 - 78 = -72.$$

30.5.

5.11 Die komplementäre Matrix und die Inverse.

Für $A \in M_n$ sei $\tilde{a}_{ij} := \det \tilde{A}_{ji} \underset{5.7}{=} (-1)^{i+j} \det A_{ji}$.

$$\tilde{A} := (\tilde{a}_{ij}) \underset{5.7}{=} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \cdots \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & \\ \det A_{13} & & \vdots \end{pmatrix}$$ heißt die

zu A komplementäre Matrix.

Satz. $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \det A \cdot 1\!\!1_n$.
Falls A invertierbar, ist also $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$

Bew.: Es ist

$$(A \cdot \tilde{A})_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \det \tilde{A}_{kj} \underset{5.7}{=} \sum_{j=1}^n a_{ij} \det \hat{A}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_{k-1} \\ 0 \cdots \underset{j}{1} \, 0 \cdots 0 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \leftarrow k \underset{D1}{=} \sum_{j=1}^n \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot 0 \; \underset{j}{a_{ij}} \; 0 \cdots \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{D1}{=} \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{k-1} \\ \vec{a}_i \\ \vec{a}_{k+1} \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \underset{D2}{=} \begin{cases} \det A, & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

A invertierb. $\Leftrightarrow \det A = ad - bc \neq 0$ und in diesem Fall

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Diese Formel für A^{-1}, ebenso wie die ähnliche Formel für lineare Gleichungssysteme (Cramersche Regel, vgl. Übungen), sind theoretisch interessant, aber für $n \geq 3$ selten praktisch.

6. Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

6.1 Die Fragestellung.

Sei $T: V \to V$ lin. Abb. (immer in diesem Abschnitt)
Finde Basis $\mathfrak{b}$ von V, sodass $M_T^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ möglichst einfach wird.
Ist $\mathfrak{b}'$ irgendeine Basis von V, aber $M_T^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}'}$ nicht so einfach, dann finde als $S = M_I^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}$, sodass

$$M_T^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} = S^{-1} M_T^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}'} S$$

möglichst einfach.

6.2 Definitionen.

Sei $T: V \to V$ linear.

i) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert (EW) von T, falls es $x \in V$, $x \neq 0$ (!) gibt mit $Tx = \lambda x$.
x heißt dann Eigenvektor (EV) zum EW λ.

ii) Für einen EW $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt

$$E_\lambda^T := \{x \in V : Tx = \lambda x\} = \{x \in V : (T - \lambda \mathbb{1})x = 0\} = \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbb{1})$$

<u>Eigenraum</u> (E.R.) zum EW λ.
Offenbar E_λ^T lin. Teilraum.
$\dim E_\lambda^T$ heißt die geometrische <u>Vielfachheit</u> des EW λ, ist $\dim E_\lambda^T = k$, so heißt λ auch <u>k-fach entartet</u>. $E_\lambda^T \setminus \{0\} = \{$EV von T zum EW $\lambda\}$.
Ist λ kein EW, setze $E_\lambda^T = \{0\}$.

iii) $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda$ ist EW von $T\}$ heißt das <u>Spektrum</u> von T.

6.3 Diagonalisierbarkeit

Offensichtlichkeit: Sei $T: V \to V$, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V. Äquivalent sind

a) $\mathcal{B}$ besteht nur aus Eigenvektoren.

b) $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ hat Diagonalgestalt, d.h.,

$$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist $Tb_i = \lambda_i b_i$, also b_i EV zum EW λ_i.

Eine solche Basis ist optimal zum Rechnen. z.B.

$$M_{T^k}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

T invertierbar $\Leftrightarrow$ $\lambda_i \neq 0$, $1 \le i \le n$ und in diesem Fall

$$M_{T^{-1}}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\det T = \det M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

<u>Def</u>: T heißt <u>diagonalisierbar</u>, falls es eine Basis aus Eigenvektoren für T gibt.

<u>Große Frage</u>: Wann ist T diagonalisierbar?
Werden sehen: Das kann u.a. von $\mathbb{K}$ abhängen

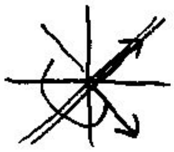
Weitere wichtige Anwendungen:

- Maxima u. Minima von Fkten $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (vgl. Ana II)
- Hauptachsentransf. von Kegelschnitten (Normalform)

- Lineare Differentialgleichungen (z.B. gekoppelte Pendel)
- Q.M.:
  - Q.M.-Observable wie Energie, Ort, Impuls, Drehimpuls, etc. werden durch "s.a." lin. Abb. T beschrieben.
  - Messung e. Observable ergibt einen Eigenwert von T
  - Nach der Messung befindet sich das System in e. Zustand, der durch e. EV zu λ beschrieben wird.
  - Ist T Energie, dann sind die Eigenvektoren stationäre Zustände
- Dyn. Systeme i.d. Nähe von Fixpunkten
- Eigenwerttheorie ist der wichtigste Teil der linearen Algebra!

6.4 Manche lin. Abb. sind diagonalisierbar, manche nicht.

Bsp. 1: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T Spiegelung an $y = x$: $T \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$



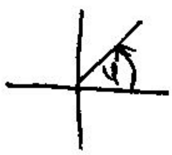
$b_1 := \binom{1}{1}$ EV zum EW 1

$b_2 := \binom{1}{-1}$ EV zum EW -1

$\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ Basis aus EVen

$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Bsp. 2: T Drehung um Winkel φ, $M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$



$0 < \varphi < \pi$: kein Eigenvektor / Eigenwert

$\varphi = \pi, 3\pi, \ldots$ $T = -\mathbb{1}$: -1 EW
Jeder Vektor EV zu -1.

$\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ $T = \mathbb{1}$: 1 EW
Jeder Vektor EV zu 1.

Bsp. 3: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $M_T^{E,E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$T\vec{x} = \lambda\vec{x}: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \lambda$ nicht EW

$\lambda = 0 \Rightarrow x_2 = 0$, x_1 beliebig $\Rightarrow \lambda = 0$ EW, $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ EV zu $\lambda = 0$.

$\sigma(T) = \{0\}$, $\dim E_0^T = 1$.

Aber: nicht diagonalisierbar: zu wenig EVen.

6.5 <u>Satz</u>. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ <u>verschiedene</u> EWe von T mit EVen $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$. Dann ist $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$ linear unabhängig: "EVen zu verschiedenen EWen sind linear unabhängig".

Insbes.: T hat höchstens $\dim V$ verschiedene EWe.

Bew.: Vollständige Induktion nach k:

$k = 1$: Beh. klar, da $\vec{x}_1 \neq 0$.

Sei Beh. richtig für ein k und sei

$\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0$. Dann

$$T(\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_{k+1} x_{k+1})$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0 \quad \text{und}$$

$$\lambda_{k+1} \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_{k+1} \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0, \quad \text{also}$$

$$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} x_k + \alpha_{k+1} \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})}_{= 0} x_{k+1} = 0$$

Ind.Vor. $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$ ($x_{k+1} \neq 0$!) $\Rightarrow$ Beh..

6.6 Satz (Etwas allgemeiner).
Sei $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$
$\dim E^T_{\lambda_1} = n_1, \dots, \dim E^T_{\lambda_k} = n_k$
$\mathcal{B}_1 := \{v^1_1, \dots, v^1_{n_1}\}$ Basis von $E^T_{\lambda_1}$
$\vdots$
$\mathcal{B}_k := \{v^k_1, \dots, v^k_{n_k}\}$ " " $E^T_{\lambda_k}$.
Dann ist
$\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k = \{v^1_1, \dots, v^1_{n_1}, v^2_1, \dots, v^2_{n_2}, \dots, v^k_{n_k}\}$ lin. unabh.

Bew.: Fast klar:

$$0 = \sum_{i,j} \alpha_{ij} v^i_j = \sum_{i=1}^k \big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v^i_j}_{\in E^T_{\lambda_i}} \big)$$

$$\xRightarrow{6.5} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v^i_j = 0 \text{ in } E^T_{\lambda_i}$$

$$\xRightarrow{\text{Basis}} \alpha_{ij} = 0 \quad \blacksquare$$

6.7 <u>Satz</u>. Äquivalent sind in der Situation von 6.6
a) T ist diagonalisierbar
b) $n_1 + \dots + n_k = n$.

Bew.: a) $\Rightarrow$ b) klar durch Abzählen.
b) $\Rightarrow$ a) klar.