Rückblick auf das 1. Semester,
zur Logik der Vorlesung

Ausgangspunkt: Vektoren i.d. Schule: Ortsvektoren, n-Tupel
Vektoren i.d. Physik: Kraft, Geschw., etc.

Abstraktion:
Gemeinsamkeit: mit Skalaren multiplizieren, addieren
→ Vergiss die anschauliche Vorstellung
Frage nicht, "was sind Vektoren ..."
→ Abstrakte V-R. (1.4)

Verlust: Anschauung
Gewinn: Können immer neue Anschauungen bilden
Bsp.: Auch Funktionen sind Elte e. Vektorraums,
Ableitung ist lin. Abb. / Matrix
oder ...
⇝ Geometrie mit Funktionen

Zur Geschichte: Abstrakte V.R. ziemlich neu und schwer:
Erfunden von Hermann Günther Grassmann 1844-1861
Hat niemand verstanden. Widmete sich der
Sprachtheorie, Linguistik (Lautverschiebung, Sprachlehre,
Sanskrit)
Ab 1888 Peano, nach 1900 in Deutschland
Aber: Ohne diese Entwicklung hätte Ende der
20er Jahre nicht die QM entwickelt werden
können!
N.B.: Heisenberg wusste nicht, was Matrizen
sind. Max Born hat's ihm gesagt
⇝ J.v. Neumann.

Problem: Wie rechnet man in abstrakten V.R.?
Antwort: Koordinaten
Frage: Woher?
Antwort: Basis!

Fr.: Sind wir jetzt wieder da, wo wir waren?
Antw: Nein! Die abstrakte Sichtweise gibt in konkreten Situationen die Freiheit, die Basis so zu wählen, dass Rechnungen möglichst einfach werden!

Das ist die Leitidee der L.A.; wird hoffentlich immer klarer.

Kapitel 2: Basis ist solche Menge $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ von Vektoren, dass jeder Vektor x auf eindeutige Weise als L.K. $x = \sum_i \lambda_i b_i$ dargestellt werden kann.
Halte $\mathcal{B}$ fest, vergesse b_i, behalte λ_i.
Primäres Objekt: x
abgeleitet: $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Kapitel 3: Zentraler Gegenstand: ~~bisher~~ ab jetzt: lineare Abb.
Inhalt von Kapitel 3: Koordinatisierung von lin. Abb.:
Idee: $A: V \to W$ lin. Abb.,
$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V
$\mathcal{B}' = \{b_1', \dots, b_m'\}$ " " W
A eindeutig festgelegt durch $A(b_1), \dots, A(b_n)$;
$A(b_j) = \sum \alpha_{ij} b_i'$: ~~in den~~ ⊕
Halte $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ fest, vergesse b_i, b_i', behalte (α_{ij})
⊕ In den Spalten stehen die (Koordinaten der) Bilder der Basisvektoren

Ordne an als $\begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix} =: M_A^{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}$

N.B.: Diese Anordnung ist willkür!
Aber es ist gut, dass sich alle an dieselbe Willkür halten!
⇝ Addition + Multiplikation von Abbildungen / Matrizen

Langfristiges Ziel:
Halte lin. Abb. A fest, wähle $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ möglichst geschickt

2. Schritt: Wie ändert sich Matrix bei Basiswechsel?
Antwort: $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1'$ Basen von V, $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2'$ Basen von W,
dann
$$M_A^{\mathcal{L}_1', \mathcal{L}_2'} = M_{I_W}^{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2'} M_A^{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} M_{I_V}^{\mathcal{L}_1', \mathcal{L}_1} \quad (3.17)$$

1. Schritt: Wann ist eine Matrix S Transform-matrix?
Antwort: ⇔ Spalten lin. unabhängig
⇔ S invertierbar: $S = M_I^{\mathcal{L}, \mathcal{L}'} \Rightarrow S^{-1} = M_I^{\mathcal{L}', \mathcal{L}}$
(3.16)

3. Schritt: Wann sind zwei Matrizen A, B interpretierbar als Matrizen derselben lin. Abb. zu versch. Basen?
Antwort: ⇔ ∃ invertierb. Matrizen S, R mit
$$B = S A R^{-1}$$
d.h. wenn A, B äquivalent sind

Betrachtet man Abb. A von $V \to V$
dann Matrizen quadratisch.
betrachte vor allem $M_A^{\mathcal{L}, \mathcal{L}}$,
$$M_A^{\mathcal{L}', \mathcal{L}'} = S \, M_A^{\mathcal{L}, \mathcal{L}} S^{-1} \quad \text{mit } S = M_{I_V}^{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}$$
ähnliche Matrizen (: 3.18)

3.20 Was ändert sich, wenn man speziell ONBs betrachtet?

<u>Def.</u>: $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$ Matrix

$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{n,m}$ heißt die zu A <u>transponierte</u> Matrix

$A^* := \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{m,n} \end{pmatrix} = \overline{A^T}$ heißt die zu A <u>adjungierte</u> Matrix.

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann $A^T = A^*$)

A heißt <u>symmetrisch</u>, falls $A = A^T$
<u>selbstadjungiert</u> $A = A^*$
<u>orthogonal</u>: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A^T = A^{-1}$
<u>unitär</u> $A^* = A^{-1}$

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ONB für V, $T: V \to V$, V mit S.P., sodass
$\mathcal{B}' := \{T(b_1), \dots, T(b_n)\}$ ONB
Sei $M := M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, dann:
M quadratisch, i.d. Spalten steht die ONB
$\{T(b_1)_{\mathcal{B}}, \dots, T(b_n)_{\mathcal{B}}\}$.
Dann <u>stehen</u> in den <u>Zeilen</u> von M^* die Vektoren
$\{\overline{T(b_1)}_{\mathcal{B}}^T, \dots, \overline{T(b_n)}^T\}$, also

$$M^* M = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$, d.h., M ist unitär

---

<u>Also</u>: Ist V V.R. mit S.P., dann ist S Transformationsmatrix zwischen zwei ONB, genau dann wenn $S^* = S^{-1}$, d.h., S unitär / orthogonal (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)!
In diesem Fall ist S^{-1} leicht auszurechnen.
<u>Bsp.</u>: $S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = S^* = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos-\varphi & -\sin- \\ \sin-\varphi & \cos-\varphi \end{pmatrix}$

4 Rechnen mit linearen Abbildungen und Matrizen
Elementare Umformungen, lin. Gleichungssysteme, Determinanten
" Bestimmung charakterist. Eigenschaften"

4.1 Matrizen bestehen aus Vektoren

Sei $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$

Die Zeilen, bzw. Spalten, von A, aufgefasst als Vektoren in $\mathbb{K}^n$, bzw. $\mathbb{K}^m$, heißen auch die Zeilenvektoren, bzw. Spaltenvektoren, von A.
Schreibe auch $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}^1, \ldots, \vec{a}^n \end{pmatrix}$

Wo nötig, interpretiere A als Matrix e. linearen Abb., z.B. $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ bzgl. kanon. Basis.

Def.: $\underline{\text{Zeilenrang}(A)} := \dim LH\{\text{Zeilenvektoren}\}$
$\underline{\text{Spaltenrang}(A)} := \dim LH\{\text{Spaltenvektoren}\}$
$= \dim \text{Bild } T_A$.

§ Elementare Umformungen (EUen)

4.2 Definition. Eine elementare Zeilenumformung (EZU), bzw. Spaltenumformung (ESU) vom

Typ I ist die Multiplikation einer Zeile, bzw. Spalte, von A mit $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$.

Typ II ist die Addition des λ-fachen ($\lambda \in \mathbb{K}$) einer Zeile, bzw. Spalte, zu einer anderen Zeile, bzw. Spalte

Typ III ist das Vertauschen zweier Zeilen, bzw. Spalten.

Entsteht eine Matrix B aus A durch eine endliche Anzahl EZUen (ESUen, EUen := element. Umformungen), so schreibe $A \underset{EZU}{\sim} B$, bzw. $A \underset{ESU}{\sim} B$, bzw. $A \underset{EU}{\sim} B$.

Bem.: Vgl. Gaußsches Eliminationsverfahren 1.23.

4.3 Beobachtungen: Durch EUen ändert sich die Matrix nicht wirklich.

1. Eine EU vom Typ III lässt sich aus EUen vom Typ I u. Typ II zusammensetzen:

$$\begin{pmatrix}\vec a\\ \vec b\end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}]{} \begin{pmatrix}\vec a\\ \vec a+\vec b\end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}]{} \begin{pmatrix}-\vec b\\ \vec a+\vec b\end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}]{} \begin{pmatrix}-\vec b\\ \vec a\end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I}]{} \begin{pmatrix}\vec b\\ \vec a\end{pmatrix}.$$

2. Durch Transposition gehen EZUen in ESUen über und umgekehrt

3. Sei, in Zeilenvektorschreibweise,

$$A = \begin{pmatrix}\vec a_1\\ \vdots\\ \vec a_m\end{pmatrix},\quad A_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix}\vec a_1\\ \vdots\\ \lambda\vec a_i\\ \vdots\\ \vec a_m\end{pmatrix},\quad A_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix}\vec a_1\\ \vdots\\ \vec a_i\\ \vdots\\ \vec a_j+\lambda\vec a_i\\ \vdots\\ \vec a_m\end{pmatrix},$$

dann ist

$$A_{\mathrm{I}} = S_{\mathrm{I}} A,\quad A_{\mathrm{II}} = S_{\mathrm{II}}\cdot A \quad \text{mit}$$

$$S_{\mathrm{I}} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}_{m\times m}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ i\\ \\ \\ \end{array},\quad S_{\mathrm{II}} := \begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \vdots & \ddots & & \\ & \lambda & \cdots & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{pmatrix}_{m\times m}\begin{array}{l}\\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}$$

und $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$ sind invertierbar

$$S_{\mathrm{II}}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \vdots & \ddots & & \\ & -\lambda & \cdots & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}$$

Analog ESUen durch Multiplikation von rechts.
Daraus ergibt sich:

4.4 <u>Satz</u>. 1.) EZUen, bzw. ESUen, entsprechen der Multiplikation von links, bzw. rechts, mit invertierbaren Matrizen, also einem Basiswechsel im Bildraum, bzw. Urbildraum.

2) Durch EZUen, bzw. ESUen, ändert sich nicht die lineare Hülle der Zeilenvektoren, bzw. Spaltenvektoren
[Klar für Spaltenvektoren = Bilder der Basisvektoren. Für Zeilenvektoren durch Transposition.]

3) EUen ändern weder den Zeilenrang noch den Spaltenrang von A.

Def.: "klar" ["klar" für Spaltenrang; durch Transposition für Zeilenrang].

4.5 Definition. Die Matrix A hat <u>Zeilenstufenform</u> (ZSF), falls

$$A = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \alpha_{1,i_1} & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2,i_2} & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{3,i_3} \cdots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

wo $\alpha_{k,i_k} \neq 0$, $i_1 \lneq i_2 \lneq \cdots$,

... untere Zeilen dürfen auch verschwinden.

(vgl. 1.23).

"Klar" ist: In diesem Fall sind die Zeilenvektoren $\neq 0$ linear unabhängig

4.6 Hauptsatz über EUen.

Sei $A \in M_{m,n}$.

1. Durch EZUen vom Typ II lässt sich A auf ZSF bringen

2. Äquivalent sind (für $m=n$)

a) A invertierbar

b) $A \underset{EZU_{II}}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, $\alpha_{ii} \neq 0$

c) $A \underset{EZU_{I}}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, $\alpha_{ii} \neq 0$

d) $A \underset{EZU}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

3. $A \underset{EU}{\sim} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Beweis (knapp): 1. Gaußsches Eliminationsverfahren (1.23)

2.) a) ⇒ A quadratisch, $A \in M_{n,n}$

Bringe wie in 1.) A durch EZU_{II} auf ZSF $\bar{A}$

A invertierbar ⇒ Spaltenrang von $A = n =$ Spaltenrang von $\bar{A}$

Wäre $\alpha_{ii} = 0$, dann wäre $a_{nn} = 0$, also Spaltenrang $< n$ ↯

Also: b)

b) ⇒ c) Arbeite von unten nach oben

c) ⇒ d) Benutze EZU_I

d) ⇒ a) $n =$ Spaltenrang von $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \overset{=}{\underset{4.4.3}{}}$ Spaltenrang von A

⇒ A invertierbar.

3.)

$$A \underset{EZU_{II}}{\sim} \underset{ZSF}{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & & \\ & 0 & \end{pmatrix}} \underset{ESU}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & & * & * \\ 0 & & \alpha_{kk} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \alpha_{ii} \neq 0 \\ 1 \leq i \leq k \end{array}$$

$$\underset{EZU_{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & & 0 & * \\ 0 & & \alpha_{kk} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \underset{ESU_{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & & 0 & 0 \\ 0 & & \alpha_{kk} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{EZU_{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \quad \blacksquare$$

Jetzt Anwendungen

25.4. 4.7 Rang

Satz / Korollar: Für jede Matrix A ist
Zeilenrang von A = Spaltenrang von =: Rang (A).

Bew.: Zeilenrang $(A) \underset{4.6.3 + 4.4.3}{=}$ Zeilenrang $\left(\begin{array}{c|c} 1 \ddots 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) =$ Spaltenrang $\left(\begin{array}{c|c} 1 \ddots 1 & \\ \hline & \end{array}\right)$
= Spaltenrang (A).

Also: Unterscheide nicht mehr zwischen Zeilenrang, Spaltenrang und Rang.

4.8 Aufgabe: Gegeben Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{K}^n$.
Bestimme eine Basis für $LH\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$
(damit insbes.: Test auf lin. Unabhängigkeit, Dimension der linearen Hülle)

Lösung: Bringe $A := \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix}$ durch EZU$_m$ auf ZSF.
Die von Null verschiedenen Zeilenvektoren bilden die gewünschte Basis. (4.4.2)

$$\text{Bsp.: } \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{EZU_{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{EZU_{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.9 Aufgabe: Sei A quadratische Matrix.
Stelle f. fest, ob A invertierbar ist, und berechne z. gegebenenfalls die Inverse.

1. Bringe A durch EZUen auf ZSF. A invertierbar $\Leftrightarrow$ Rang $A = n$. vgl. 4.6.2
2. Bringe A durch EZUen auf Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
Führe parallel dazu sukzessive dieselben EZUen an der Einheitsmatrix durch, dann ergibt sich aus ihr A^{-1}.

Begründung und Beispiele s. Ü.A.; wichtig!

4.10 Lineare Gleichungssysteme, Notation.
Betrachte LGS

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1 + \cdots + \alpha_{1n} x_n &= \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ \alpha_{m1} x_1 + \cdots + \alpha_{mn} x_n &= \beta_m \end{aligned} \qquad (*)$$

Basisunabhängige Schreibweise:

Sei A die Matrix $A = (\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in M_{m,n}$,

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

Dann wird (*) zu

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Bzgl. der kanonischen Basen in $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ kann A auch als Matrix der lin. Abb. $\vec{x}, \vec{b}$ als Vektoren gelesen werden.
$A = M_T$ $\quad T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

Ist $\vec{b} = 0$, so heißt $A\vec{x} = 0$ homogenes LGS.
Ist $\vec{b} \neq 0$, so heißt $A\vec{x} = \vec{b}$ inhomogenes LGS und $A\vec{x} = 0$ das zugeh. homogene LGS.

4.11 Homogenes LGS, abstrakt.

Betrachte $A\vec{x} = 0$ homog. LGS, dann gilt
1. $\vec{x} = 0$ ist immer Lösung
2. $\vec{x} = 0$ ist die einzige Lösung $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} T_A = \{0\}$
$\Leftrightarrow T_A$ ist injektiv
$\Leftrightarrow \operatorname{Rang} T_A = \operatorname{Rang} A = n$
3. Im Allgemeinen ist
$\{\vec{x} : A\vec{x} = 0\} = \operatorname{Ker} T_A$ linearer Teilraum von $\mathbb{K}^n$ und
$\dim \operatorname{Ker} T_A = n - \underbrace{\operatorname{Rang} T_A}_{= \dim \operatorname{Bild} T_A} = n - \operatorname{Rang} A$ (vgl. 3.4).

4.12 Aufgabe: Löse das homogene LGS $A\vec{x}=0$

Lösung: α) Bringe A durch EZUm auf ZSF

β) Bringe die Matrix durch Vertauschen von Spalten
(≙ Umnummerierung d. Variablen = Vertauschen d. Basis im Urbild)
auf die Form

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & & * & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \alpha_{ii} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right), \quad \alpha_{jj} \neq 0, \; 1 \le j \le i$$

(nicht wirklich notwendig, macht es aber übersichtlicher)

γ) Löse $A'\vec{x}=0$:
Wähle beliebig $x_{i+1} := \mu_1, \ldots, x_n := \mu_k$ $\begin{pmatrix} i = \text{Rang } A \\ k = n-i \end{pmatrix}$,
bestimme rekursiv

x_i aus i-ter Zeile: $\alpha_{ii}x_i + \alpha_{i,i+1}\mu_1 + \cdots + \alpha_{i,n}\mu_k = 0$
x_{i-1} aus $(i-1)$-ter "
⋮
x_1 aus 1. Zeile

Dann ist

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} \quad \text{Lösung}$$

Insbesondere bestimmt
$(\mu_1,\ldots,\mu_k) := (1,0,\ldots,0)$ eine Lösung $\vec{x}_1$
$(\mu_1,\ldots,\mu_k) := (0,1,0\ldots)$ $\vec{x}_2$
⋮
$(\mu_1,\ldots,\mu_k) := (0,0,\ldots,0,1)$ $\vec{x}_k$,
dann ist $\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_k\}$ eine Basis des
Lösungsraumes $\operatorname{Ker} T_A$.

Begründung:
α) Bringe auf ZSF ≙ Multiplikation mit invertierbarer Matrix S von links (4.4.1), ändert also nicht den Lösungsraum.

N.B.: Da S invertierbar, wird der Lösungsraum auch nicht größer!

β) ✓

γ) $\text{Rang } A \overset{=\text{Rang } T_A}{=} i$, also $\dim \text{Ker } T_A = n - \text{Rang } T_A = n - i = k$.
Also ex. k lin. unabh. Lösungen.
Offenbar sind $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ linear unabh., denn sie sind "linear unabh. in den letzten k Koordinaten".
Also gilt sogar allgemeiner:
Wählt man $(\mu_{i+1}, \dots, \mu_n)$ so, dass sukzessive eine Basis von $\mathbb{K}^k$ entsteht, so bilden die Lösungen eine Basis.
Zusammenhang zum Satz über implizite Funktionen vgl. später ... (?).

Beispiel:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 \phantom{{}-x_4} &= 0 \\ x_1 - 2x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\alpha) \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{EZU}}{\rightsquigarrow} A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

β) überspringen wir

γ) Können $x_2 = \mu_2$, $x_4 = \mu_4$ beliebig wählen.

i) $x_2 = 1$, $x_4 = 0$
$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 - 2 + x_3 &= 0 \\ -x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Lösung}$$

ii) $x_2 = 0$, $x_4 = 1$
$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_3 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Lösung}$$

Also allgemeine Lösung
$$\text{Ker } T_A = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

Bemerkung: Das geht auch simultan: Starte mit Parametern

$$x_2 = \mu_1, \quad x_4 = \mu_2:$$

$$x_1 - 2\mu_1 + x_3 \qquad = 0$$

$$-x_3 - \mu_2 = 0 \Rightarrow x_3 = -\mu_2$$

$$\Rightarrow x_1 = 2\mu_1 + \mu_2.$$

$$\Rightarrow \ker T_A = \left\{ \begin{pmatrix} 2\mu_1+\mu_2 \\ \mu_1 \\ -\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} : \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K} \right\}$$ allgemeine Lösung. (vgl. oben)

4.13 Inhomogene LGS, abstrakt.

Betrachte $A\vec{x} = \vec{b}$, wo $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ (*)

Offensichtlich gilt:

i) Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A\vec{x}_0 = 0$, dann ist auch $A(\vec{x}+\vec{x}_0) = \vec{b}$

ii) Ist $A\vec{x}_1 = \vec{b}$ und $A\vec{x}_2 = \vec{b}$, dann ist $A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0$.

Also

Satz: Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (*) erhält man aus einer beliebigen speziellen Lösung von (*) durch Addition der allgemeinen Lösung des (zugeh.) homogenen LGS.

2.5. Folgende Fälle sind bes. wichtig:

1. (*) lösbar $\Leftrightarrow \vec{b} \in \text{Bild } T_A$
2. (*) universell lösbar, d.h., lösbar $\forall \vec{b} \in \mathbb{K}^m$
   $\Leftrightarrow T_A$ surjektiv
   $\Leftrightarrow \text{Rang } A =: \text{Rang } T_A = m$
3. (*) eindeutig lösbar, d.h., es gibt höchstens eine Lösung
   $\Leftrightarrow T_A$ injektiv
   $\Leftrightarrow \ker T_A = 0$
   $\Leftrightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } T_A = n$

4. (*) universell und eindeutig lösbar

$\iff T_A$ bijektiv

$\iff A$ invertierbar (also $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$)

$\iff m = n = \operatorname{Rang} T_A = \operatorname{Rang} A$

4.14 Aufgabe: Löse das inhomogene LGS $A\vec{x} = \vec{b}$

Bezeichnung: Die Matrix $(A, \vec{b}) := \left(\begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{matrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{matrix}}_{b} \end{array}\right) \in M_{m,n+1}$

heißt die erweiterte Koeffizientenmatrix.

1. Schritt: Stelle fest, ob (*) lösbar ist

Lösung: Bringe $(A, \vec{b})$ mit EZU$_m$ auf ZSF (A', b').

Dann $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar $\iff A'x = \vec{b}'$ lösbar

$\iff (A', b') = \left(\begin{array}{c|c} \ast & \ast \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ mit $\underbrace{}_{A'}$, $\underbrace{}_{\vec{b}'}$

$\iff \operatorname{Rang} A' = \operatorname{Rang} (A', b')$.

In diesem Fall ist $A\vec{x} = \vec{b} \iff A'\vec{x} = \vec{b}'$.

Begründung:

$A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar $\iff \vec{b} \in \operatorname{Bild} T_A$

$\iff$ (Spalten)rang A = (Spalten)rang $(A, \vec{b})$

$\iff$ A' (A', b')

Da EZU$_m$ $\hat{=}$ Multiplikation von links mit invertierb. Matrix S, ist

$A \underset{EZU_m}{\sim} A' = SA$

$\vec{b} \sim \vec{b}' = S\vec{b}$

$Ax = \vec{b} \iff \underbrace{SA}_{A'}\vec{x} = \underbrace{S\vec{b}}_{b'}$

<u>Beispiel</u>: (vgl. 4.12): $A\vec{x} = \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A\vec{x} = \vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cccc:c:c} \underbrace{\begin{matrix}1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1\end{matrix}}_{A} & & \begin{matrix}1 \\ 2 \\ -1\end{matrix} & \begin{matrix}1 \\ 1 \\ 1\end{matrix} \end{array}\right) \quad \vec{b} \quad \vec{b}_1$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c:c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

lösbar nicht lösbar.

2. Schritt (kann wieder weggelassen werden, vgl. 4.12. β)
Bringe $(A', \vec{b}')$ durch ESU_{III} auf $\left(\begin{array}{cc|c:c} \alpha_{11}' & * & & \beta_1' \\ & \ddots \ \alpha_{ii}' & * & \vdots \\ 0 & & & \beta_i' \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
(Umnummerierung, ändert sonst nichts)

$\alpha_{kk} \neq 0$, $1 \le k \le i$

3. Schritt: Bestimme die allgemeine Lösung von $A\vec{x} = 0$
(vgl. 4.12) $\iff A'\vec{x} = 0$

4. Schritt: Bestimme eine spezielle Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$
$\iff A'\vec{x} = \vec{b}'$

Meist am einfachsten: Setze $x_{i+1} = \dots = x_n = 0$,
d.h., löse

$$\begin{aligned} \alpha_{11}' x_1 + \alpha_{12}' x_2 + \dots + \alpha_{1i}' x_i &= \beta_1' \\ \alpha_{22}' x_2 + \dots + \alpha_{2i}' x_i &= \beta_2' \\ &\ \vdots \\ \alpha_{ii}' x_i &= \beta_i' \end{aligned}$$

durch rückwärts Auflösen

<u>Beispiel</u>: $x_2 = x_4 = 0$, dann bleibt

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ -x_3 &= 1 \Rightarrow x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine spezielle Lösung.

5. Schritt: Addiere die spezielle Lösung aus 4. zur allgemeinen Lösung aus 3.
(Begründung: 4.13)

<u>Beispiel</u>: Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 + \quad + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ -1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

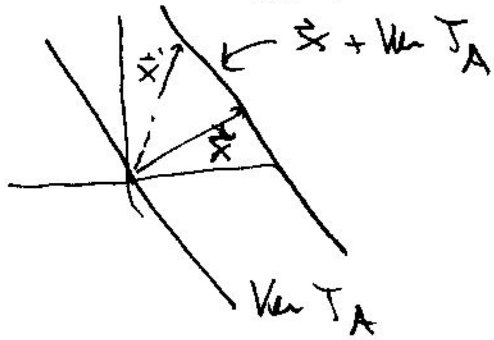
4.14 Diskussion.

1. Ist $\vec{x}$ spezielle Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$, dann

allgemeine Lösung $= \{ \vec{x} + \vec{y} : y \in \operatorname{Ker} T_A \}$

$$= \vec{x} + \underbrace{\operatorname{Ker} T_A}_{\text{lin. T.R.}}$$

" um $\vec{x}$ verschobener linearer T.R. $\operatorname{Ker} T_A$":
<u>"affiner Teilraum"</u>



2. Betrachte nochmal $A\vec{x} = \vec{b}$.

i) Falls eindeutig u. universell lösbar, dann
$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, d.h. $\vec{x}$ Funktion der Inhomogenität $\vec{b}$.

ii) Falls universell lösbar, dann
T_A surjektiv $\Rightarrow n \geq m$, A Maximalrang.
Durch Vertauschen von Spalten hat A
OBdA die Form

$$A = \Big(\underbrace{A_1}_{m\times m} \;\vdots\; \underbrace{A_2}_{m\times k}\Big), \quad k = n-m$$

Spalten l.u., also A_1 invertierbar

Also: , $\vec{x} = \begin{pmatrix}\vec{x}_1\\ \vec{\mu}\end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 \in \mathbb{K}^m$, $\vec{\mu} \in \mathbb{K}^k$

$$A\vec{x} = A_1\vec{x}_1 + A_2\vec{\mu}.$$

Also: $A\vec{x} = \vec{b} \iff A_1\vec{x}_1 + A_2\vec{\mu} = \vec{b}$

$\iff A_1\vec{x}_1 = (\vec{b} - A_2\vec{\mu})$

$\iff \vec{x}_1 = A_1^{-1}(\vec{b} - A_2\vec{\mu})$

Also: Die ersten m Koordinaten der Lösung können als Funktion der letzten k Koordinaten dargestellt werden, d.h., $A\vec{x} = \vec{b}$ kann nach den ersten m Koordinaten aufgelöst werden.

In der Analysis wird aus i) der Satz über die Umkehrfunktion, aus ii) der Satz über die implizite Funktion (wo OBdA $\vec{b} = 0$): $f: \mathbb{K}^{m+k} \to \mathbb{K}^m$ "regulär" $\Rightarrow f(\vec{x}, \vec{\mu}) = 0$ kann lokal nach $\vec{x}$ aufgelöst werden.

3. Theorie u. Praxis der EUm: $\neq 0$ ist nicht gleich $\neq 0$.

Ist $A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & * \\ \hline * & * \end{array}\right)$ mit $a_{11} \neq 0$, so ist

$$A \underset{EZU_{II}}{\sim} \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right).$$

Aber: Ist a_{11} sehr klein $\ll a_{21}$ $\cancel{\ll a_{12}}$, ..., so dividiert man durch sehr kleine Zahlen ⇝ numerisch instabil → Rundungsfehler

Analog bei $\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{b}$.

Idee: Verschiebe Division durch kleine Zahlen möglichst auf das Ende der Rechnung oder vermeide sie ganz. "Pivot-Suche".