1. Grundlegendes zu Vektoren und Motivation

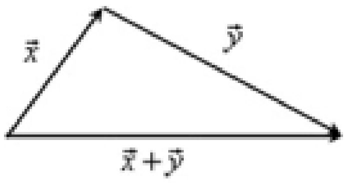
1.1 Richtungsvektoren

Vektoren sind Objekte $\vec{x}$, die eine Richtung im Raum und eine Länge besitzen: „Pfeile", „Richtungsvektoren", „freie Vektoren".

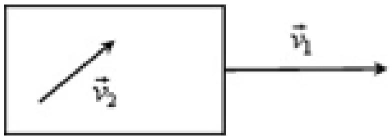
Beispiele: Kräfte, Geschwindigkeit, (Magnet-)felder, Wellenvektoren, Verschiebungen im Raum

Richtungsvektoren kann man

i. Mit einer Zahl (Skalar) multiplizieren, d.h., verlängern, verkürzen, umdrehen
ii. Addieren durch Zueinander legen:



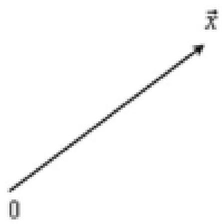
z.B. bei Geschwindigkeiten:



Superpositionsprinzip: Kräfte addieren sich wie Vektoren

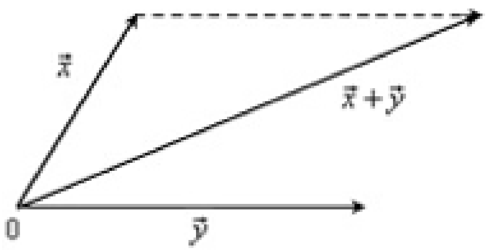
1.2 Ortsvektoren

Vektoren sind Punkte im Raum relativ zu einem Nullpunkt: „Ortsvektoren"



Ortsvektoren kann man:

i. Mit einer Zahl (skalar) multiplizieren
ii. Addieren:



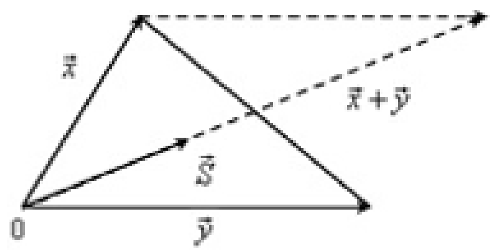
Beispiele:

- Im Ort $\vec{x}$ befindet sich die Masse m_1
  Im Ort $\vec{y}$ befindet sich die Masse m_2

  Schwerpunkt: $\vec{S} = \frac{m_1\vec{x}+m_2\vec{y}}{m_1+m_2}$

- Schwerpunkt eines Dreiecks

  $\vec{S} = \frac{1}{3}\cdot\vec{0}+\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y})$



- Sei T eine Drehung in der Ebene um φ

  i. $T(\lambda\vec{x}) = \lambda\cdot T(\vec{x})$
  ii. $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x})+T(\vec{y})$

1.3 Koordinatenvektoren

Vektoren sind Elemente von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, das heißt n-Tupel von Zahlen $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Man kann sie:

i. Skalar multiplizieren: $\lambda\vec{x} = \lambda(x_1,x_2,...,x_n) = (\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$
ii. Addieren: $\vec{x}+\vec{y}=(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=\vec{x}=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$

Beispiele:

- Koordinaten in der Ebene E_2
  Koordinaten im Raum E_3

- Legierungen: Zwei Substanzen haben die spezifischen Gewichte g_1 und g_2 und die spezifischen Wärmen c_1 und c_2. Welches Verhältnis von α_1 und α_2 ergibt eine Substanz mit dem spez. Gewicht g und der spez. Wärme c?

  Nebenbedingung: $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

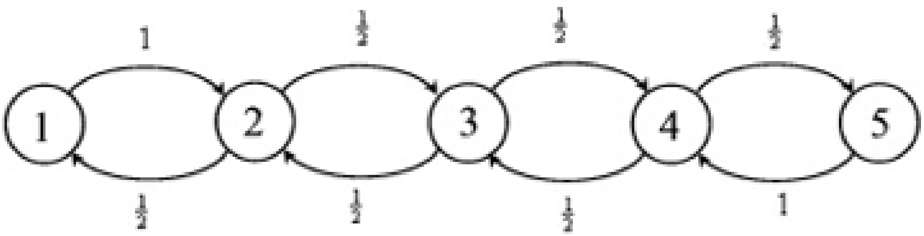
  $$\begin{aligned} g &= \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \\ c &= \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \end{aligned}$$ lineares Gleichungssystem liefert Lösung für α_1 und α_2.

  Die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (g, c)$ erfüllt

  i. $T(\lambda\vec{\alpha}) = \lambda \cdot T(\vec{\alpha})$
  ii. $T(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = T(\vec{\alpha}) + T(\vec{\beta})$

  Unser Problem: Finde $\vec{\alpha}$ mit $T(\vec{\alpha}) = (g, c)$

- Markovkette: Die Teilchen auf den Punkten 1-5 springen nach jeder Sekunde zu einem Nachbarn mit den angegeben Wahrscheinlichkeiten:



  Weiß man zu Beginn den Startpunkt, so weiß man nach n Schritten die Wahrscheinlichkeiten $p_1, ..., p_5$ für den Ort des Teilchens. $(p_1, ..., p_5)$ ist ein Koordinatenvektor mit $p_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$ und heißt *Wahrscheinlichkeitsvektor*.

  Ist $\vec{p} = (p_1, ..., p_5)$ der W-Vektor zur Zeit n, so ist
  $T(\vec{p}) = \left(\frac{1}{2}p_2, p_1 + \frac{1}{2}p_3, \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_4, \frac{1}{2}p_3 + p_5, \frac{1}{2}p_4\right)$ der W-Vektor zur Zeit $n+1$

  Typische Frage: Gegeben ist $\vec{p}$ zur Zeit n, was war der W-Vektor eine Sekunde vorher? Gibt es einen invarianten Vektor $\vec{p}$ mit $T(\vec{p}) = \vec{p}$ (Konvergenz)?

  Bem.: Obiges Modell nennt man auch eine Irrfahrt (Markov-Kette)

1.4 Gruppen und Körper

Vorbemerkung:

Rechenregen für Addition:		Rechenregeln für Multiplikation:
$(a+b)+c=a+(b+c)$	Assoziativität	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
$0+a=a+0=a$	Neutrales Element	$1\cdot a=a\cdot 1=a$
$a-a=0$	Inv. Element	$a\cdot a^{-1}=1$

Def.: Eine *Gruppe* $G,\circ$ ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\circ: G\times G\to G$ mit den Eigenschaften:

a. Assoziativ: $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$
b. Neutrales Element: $\exists e: e\circ a=a\circ e=a \quad \forall a\in G$
c. Inverses Element: $\forall a\in G \;\; \exists a^{-1}\in G$ mit $a\circ a^{-1}=e$

Falls $\forall a,b\in G$ gilt $a\circ b=b\circ a$, dann heißt G abelsche oder kommutativ Gruppe.

Beispiele:

1. $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$

2. $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\div)$ ist <u>keine</u> Gruppe, da die Assoziativität nicht gilt.

3. Permutation: Vertauschung von Elementen
   1 2 3 4 5 $\to$ 5 2 4 3 1
   $\sigma:\{1,...,n\}\to\{1,...,n\}$
   $(1,...,n)\mapsto(\sigma(1),...,\sigma(n))$

   Notation: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \mathrm{n} \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(\mathrm{n}) \end{matrix}$ Hat $n!$ Elemente

   Bilden eine Gruppe unter Hintereinanderausführung mit $e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

   $$\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$$

   Zur Notation von Hintereinanderausführung:

   $f(x)=\sqrt{x+4}$, dann ist $h: x\mapsto x+4$ und $g: y\mapsto\sqrt{y}$

   $f=g\circ h$ „g nach h“ (Reihenfolge beachten!)

4. Symmetriegruppe: Alle „Bewegungen“ des Raums, die ein gegebenes Objekt in sich selbst überführt.

Def.: Eine Menge $(K,+,\cdot)$, heißt *Körper*, wenn $(K,+)$ eine abelsche Gruppe und $(K\setminus\{0\},\cdot)$ eine abelsche Gruppe ist und es gilt $(a+b)c=ac+bc$ (Distributivgesetz).

Bsp.: $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$

Bem.: Nur $+,\cdot$ benutzt, aber $-,\div$ sind Schreibweisen: $a-b=a+(-b)$ und $a\div b=a\cdot b^{-1}$

Beispiel: binomische Formeln

$$(x+y)(x+y)\overset{\text{Dist.}}{=}x(x+y)+y(x+y)\overset{\text{Dist.}}{=}xx+xy+\underbrace{yx}_{=xy}+yy$$

$$\overset{\text{neut. Ele.}}{=}xx+1xy+1xy+yy=xx+(1+1)xy+yy=x^2+2xy+y^2$$

1.5 Vektorräume und lineare Abbildungen

Def.: Ein *K-Vektorraum* ist eine abelsche Gruppe $(V,+)$, versehen mit einer Skalarmultiplikation $K\times V\to V$, $(\lambda,\vec{x})\mapsto\lambda\vec{x}$, wobei *K* ein Körper ist (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), so dass für alle $\lambda,\mu\in K\ \ \vec{x},\vec{y}\in V$ gilt:

(S1) $(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$

(S2) $\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$

(S3) $(\lambda\mu)\vec{x}=\lambda(\mu\vec{x})$

(S4) $1\vec{x}=\vec{x}$

Bezeichnung: Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren. Der Nullvektor ist das neutrale Element von $(V,+)$, geschrieben $\vec{0}$

Es gilt: $0\cdot\vec{v}=\vec{0}$, $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}\forall\lambda\in K,\vec{v}\in V$, $(-1)\vec{v}=-\vec{v}$ (additives inverses Element von $(V,+)$)

Die Gleichung $\vec{u}+\vec{x}=\vec{v}$ ist eindeutig lösbar mit $x=\vec{v}+(-\vec{u})=\vec{v}-\vec{u}$

Def.: Seien *V* und *W* *K*-Vektorräume.
Eine Abbildung $L:V\to W$ heißt *lineare Abbildung* oder *linear* oder *Vektorraum-Homomorphismus*, falls für alle $\vec{x},\vec{y}\in V,\lambda\in K$ gilt:

(L1) $L(\lambda\vec{x})=\lambda\cdot L(\vec{x})$

(L2) $L(\vec{x}+\vec{y})=L(\vec{x})+L(\vec{y})$

Falls L zusätzlich bijektiv ist, so heißt L auch Vektorraum-Isomorphismus.
(bijektiv: $L(\vec{x}) = L(\vec{y}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$ und $\forall \vec{w} \in W \;\; \exists \vec{v} \in V$)

Falls $W = K$ gilt, so heißt L auch *Linearform* oder *lineares Funktional*

1.6 Beispiel: Funktionen als Vektoren

Auch Funktionen kann man addieren und skalar multiplizieren.

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

i. Spezielle Funktionsräume:

$$\left.\begin{array}{l} P : \{\text{Polynome } P : K \to K\} \\ P_n : \{\text{Polynome } P : K \to K, \operatorname{grad} P \le n\}, n \in \mathbb{N} \\ C : \{\text{stetige Fkt.: } K \to K\} \end{array}\right\} \text{ sind Vektorräume}$$

ii. Beispiel für lineare Abbildungen:

a. Translation

$$\left.\begin{array}{l} S_{z_0} : P \to P \text{ bzw. } P_n \to P_n \\ P = P(z) \mapsto P(z - z_0) \end{array}\right. \qquad \text{ist linear}$$

$$S_{z_0}(\lambda P) = \lambda S_{z_0}(P)$$
$$S_{z_0}(P_1 + P_2) = S_{z_0}(P_1) + S_{z_0}(P_2)$$

b. Differentiation

$$\left.\begin{array}{l} P \to P \text{ bzw. } P_n \to P_n \\ P \mapsto P' \end{array}\right. \qquad \text{ist linear}$$

$$(\lambda P)' = \lambda P'$$
$$(P_1 + P_2)' = P_1' + P_2'$$

c. Dito mehrfaches Differenzieren

$$D^k : P_n \to P_n$$

d. Differentialoperator: $T := D + 2D^2 + 3D^3$

$$T(P) = P' + 2P'' + 3P''' \qquad \text{ist linear}$$

Häufiges Problem: P_0 gegeben, P gesucht mit $T(P) = P_0$ (lin. Gleichungssystem)

Warum betrachtet man abstrakte Vektorräume?

Es ermöglicht Methoden und Anschauungen der Geometrie auf Probleme von Physik und Analysis zu übertragen. Später wird in der Quantenmechanik der scharfe Ortsvektor $\vec{x}$ durch eine Aufenthaltswahrscheinlichkeitsfunktion ersetzt.

1.7 Kartesische Koordinaten (Rene Descartes 1896-1650)

$$\left.\begin{Bmatrix}\text{geometrischer}\\ \text{physikalischer}\end{Bmatrix}\text{Raum}\right\} \to \{\text{Ortsvektor}\} \to \{\text{Koordinatenvektoren}\}$$

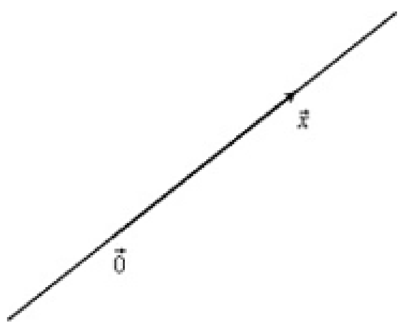
Zeichnen wir in der Ebene (Raum) einen Nullpunkt 0 aus, so wird jeder Punkt in der Ebene (Raum) ein Ortsvektor. Dadurch erhält man die Vektorräume E_2 und E_3. Legen wir durch 0 ein rechtwinkliges Koordinatensystem so lassen sich jedem Punkt $\vec{x}$ zwei (drei) Koordinaten $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ zuordnen. Wir nennen x_1, x_2 bzw. x_1, x_2, x_3 kartesische oder kanonische Koordinaten von $\vec{x}$. Umgekehrt erhält $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ die geometrische Interpretation einer Ebene bzw. eines Raumes.
Analog kann es nützlich sein $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ oder sogar aus $\mathbb{C}^n$ als die Koordinaten eines Ortsvektors in einem abstrakten raum aufzufassen und geometrisch zu denken (vgl. Raum-Zeit-Kontinuum in der Relativitätstheorie).

Durch die Einführung von Koordinaten werden geometrische Probleme zu analytischen/algebraischen Problemen.

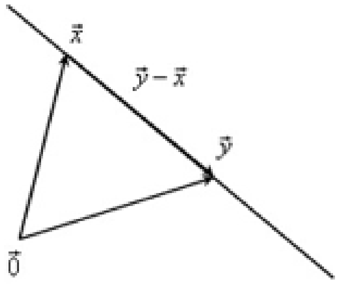
1.8 Parameterdarstellung von Geraden

V sei Vektorraum, z.B. $V = E_2$ oder E_3

- Ursprungsgeraden:
  Sei $\vec{x} \in V, \vec{v} \neq 0$, dann ist $G = \{\lambda\vec{x} : \lambda \in K\}$ die Menge aller Punkte durch 0 und $\vec{x}$
  = Gerade durch 0 und $\vec{x}$.



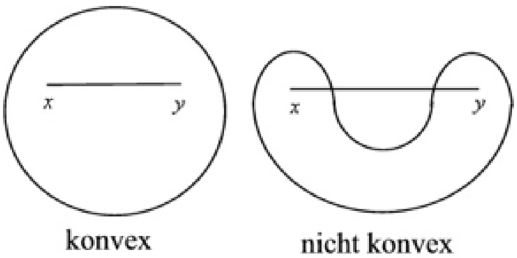
- Allgemeine Gerade:
  Sei $\vec{x},\vec{y}\in V$, dann ist $G=\{\vec{x}+\lambda(\vec{y}-\vec{x}):\lambda\in K\}=\{(1-\lambda)\vec{x}+\lambda\vec{y}:\lambda\in K\}$ die Menge aller Punkte durch $\vec{x}$ und $\vec{y}$.



z.B.: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\vec{y}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\Rightarrow G=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix};\lambda\in\mathbb{R}\right\}$

Bsp.: Schwerpunkt: $\vec{S}=\frac{m_1\vec{x}+m_2\vec{y}}{m_1+m_2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{x}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{y}$

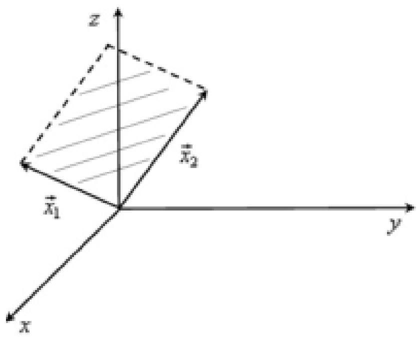
Def.: Eine Menge $M\subseteq\mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, falls $\forall x,y\in M$ die Verbindungsstrecke zwischen x und y in M liegt.
$\overline{xy}=\{(1-\lambda)\vec{x}+\lambda\vec{y};0\le\lambda\le1\}\in M$



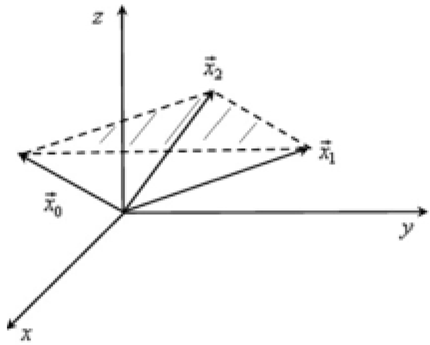
1.9 Parameterdarstellung von Ebenen und Unterräumen

V sei Vektorraum speziell E_3

- Ursprungsebene:
  Sei $x_1,x_2\in V$, dann ist $E=\{\lambda x_1+\mu x_2;\lambda,\mu\in K\}$ die Menge aller Punkte in der Ebene durch 0, $\vec{x}$ und $\vec{y}$.



- Allgemeine Ebene:
  Sei $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$, dann ist $E = \{\vec{x}_0 + \lambda(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + \mu(\vec{x}_2 - \vec{x}_0) : \lambda, \mu \in K\}$ die Menge aller Punkte in der Ebene durch $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$.



Def.: Allgemeine Unterräume
Sei V ein K-Vektorraum

i. Sei $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in V$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, dann heißt $\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$ *Linearkombination*.

ii. Eine Teilmenge $\emptyset = U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum* von V oder *linearer Teilraum*, falls gilt:

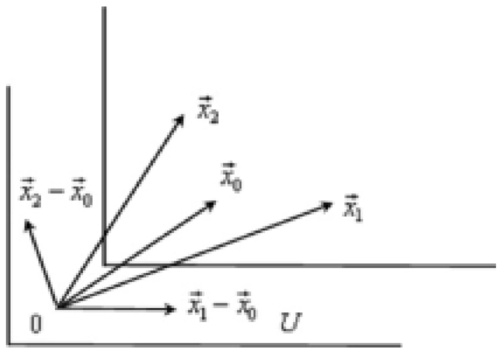
(UVR1) $\vec{u} \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \vec{u} \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. skalarer Multiplikation)
(UVR2) $\vec{u}, \vec{v} \in U \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. Addition)

Bsp. 1: Eine Ursprungsebene ist ein Untervektorraum; Eine allgemeine Ebene ist kein Untervektorraum außer im Fall $x_0 = 0$

Bsp. 2: V: Polynome P, U: Polynome P_n vom Grad höchstens n

Bsp. 3: $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in V$ sei gegeben $\Rightarrow \{\text{Linearkombination}\} = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n : \lambda_1, ..., \lambda_n \in K\}$ ist ein Untervektorraum von V

Def.: Affiner Unterraum
$U = \{\vec{x}_0 + \lambda_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + ... + \lambda_n(\vec{x}_n - \vec{x}_0); \lambda_1, ..., \lambda_n \in K\}$ heißt *affiner (Unter)raum* durch $\vec{x}_0, \vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$.



1.10 Längen von Vektoren = Normen

Die Länge (Norm) eines Vektors hängt von seiner Bedeutung ab.

Bsp. 1: In einem Populationsmodell in n Städten sei $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$ die Größe der Population in der Stadt „i" zu einem bestimmten Zeitpunkt. Ein sinnvolles Maß für die Länge (Größe) des Vektors $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $x_1 + x_2 + ... + x_n$

Bsp. 2: $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ seien die Koordinaten eines Ortsvektors in E_2. Ein sinnvolles Maß für die Länge (Größe) von $\vec{x}$ ist $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (Satz des Pythagoras)

Bsp. 3: In einer Schraubenproduktion sollen Schrauben der Länge 5cm produziert werden. Sei l_i die wirkliche Länge der i-ten Schraube, dann ist $x_i = l_i - 5cm$ ihr Fehler. Ein sinnvolles Maß für die Länge (Größe) des Fehlervektors $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $\max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$

Def.: Sei V ein K-Vektorraum
Eine Abbildung $V \to \mathbb{R}$, $\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$ heißt *Norm*, falls $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \lambda \in K$ gilt:

(N1) $\|\vec{x}\| \geq 0$ und $\|\vec{x}\| = 0$ nur für $\vec{x} = \vec{0}$ (Positivität)

(N2) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$ (Homogenität)

(N3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Dreiecksungleichung)

Beispiele: Sei $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$

i. $\|(x_1, ..., x_n)\|_1 := |x_1| + ... + |x_n|$

ii. $\|(x_1, ..., x_n)\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}$ (Euklidische Norm)

iii. $\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$

Bem.: Wir interpretieren $\|\vec{x}\|$ als die Länge des Vektors $\vec{x}$ und $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ als den Abstand zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ (heißt auch *Metrik*).

Def.: Ist $\|\vec{x}\| = 1$, so heißt $\vec{x}$ *Einheitsvektor*.
$\{x \in V : \|\vec{x}\| \leq 1\}$ heißt *Einheitskugel/ball* zur Norm $\|\cdot\|$

Bsp.: $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ ist Einheitsvektor $\qquad \left\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\| = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \|\vec{x}\| = 1$

Bem.: Einheitskugeln sind nicht immer rund, aber konvex

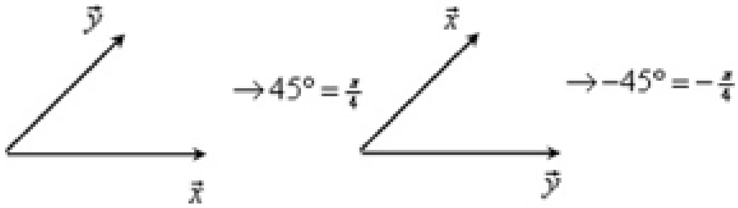
Erstellt von: Michael Thürauf

1.11 Winkel

Sei V R-Vektorraum, $\vec{x}, \vec{y} \in V$

$0, \vec{x}, \vec{y}$ spannen eine Ebene auf, die wir mit der Euklidischen Ebene E_2 identifizieren wollen. Also oBdA:

Wir definieren den (orientierten) Winkel $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ als den kleineren Winkel von $\vec{x}$ nach $\vec{y}$ in positiver Orientierung, also entgegen dem Uhrzeigersinn



Satz: Es gilt $\cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{x_1y_1+...+x_ny_n}{\|\vec{x}\|_2 \cdot \|\vec{y}\|_2}$ für $\vec{x} = (x_1, ..., x_n), \vec{y} = (y_1, ..., y_n) \in V \setminus \{0\}$

Beweis: Jänich S. 39/40

Durch die Formel wird $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) \in [0°;180°]$ definiert.

1.12 Standard-Skalarprodukt

Sei $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$

Def.: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1\overline{y}_1 + ... + x_n\overline{y}_n$ heißt *Standard-Skalarprodukt* zwischen $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$.

Bem.: $\overline{x+iy} = x - iy$

Es gilt $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|_2^2 \geq 0$ und $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|_2 \cdot \|\vec{y}\|_2 \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}))$

Insbesondere gilt:

$$\left.\begin{array}{l} |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|_2 \cdot \|\vec{y}\|_2 \\ |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\|_2 \cdot \|\vec{y}\|_2 \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y} \text{ sind parallel, d.h. } \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ oder } \pi \end{array}\right\} \text{Ungleichung von Cauchy-Schwarz}$$

Notation: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y}$

Eigenschaften des Skalarprodukts:

$\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

(SP1) $\langle\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{z}\rangle=\lambda\langle\vec{x},\vec{z}\rangle+\mu\langle\vec{y},\vec{z}\rangle$ (Linearität)

(SP2) $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle\vec{y},\vec{x}\rangle$

(SP3) $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle\geq 0$, $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=0\Leftrightarrow\vec{x}=0$

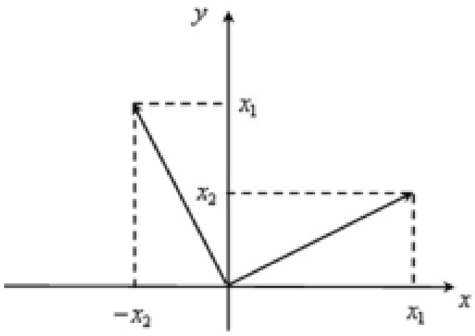
$\vec{x}$ und $\vec{y}$ heißen orthogonal, wenn $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0$ (wir schreiben $\vec{x}\perp\vec{y}$)

In diesem Fall gilt: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\langle\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle=\langle\vec{x},\vec{x}\rangle+\underbrace{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle}_{=0}+\underbrace{\langle\vec{y},\vec{x}\rangle}_{=0}+\langle\vec{y},\vec{y}\rangle=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2$

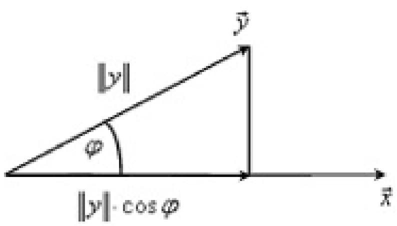
(Satz des Pythagoras)

1.13 Projektionen und orthogonale Zerlegung

i. $90°$-Drehung in $\mathbb{R}^2$
Sei $\vec{x}=(x_1,x_2)$, dann ist $\vec{y}=R\vec{x}=(-x_2,x_1)$ die $90°$-Drehung im Gegenuhrzeigersinn von $\vec{x}$, denn $\langle\vec{x},R\vec{x}\rangle=-x_1x_2+x_2x_1=0\Leftrightarrow\vec{x}\perp R\vec{x}$.
$\|R\vec{x}\|_2=\sqrt{(-x_2)^2+x_1^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\|\vec{x}\|_2$
Für $\vec{x}\neq 0$ ist $\frac{R\vec{x}}{\|R\vec{x}\|_2}$ die Einheitsnorm zu $\vec{x}$



ii. Orthogonale Projektion in $\mathbb{R}^n$
$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\varphi$



Elementargeometrie und Analysis I: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$
Die Interpretation der projizierten Länge erfolgt durch das Skalarprodukt.

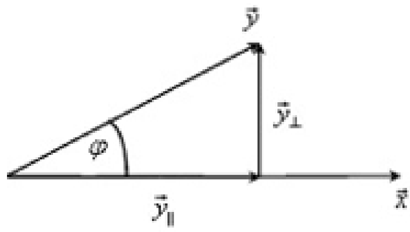
Fall $\|\vec{x}\| = 1$: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$ ist die Länge der orthog. Projektion von $\vec{y}$ auf $G = \{\lambda \vec{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \vec{x}$ ist der Vektor der orthog. Projektion von $\vec{y}$ auf $G = \{\lambda \vec{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Fall $\|x\|$ bel.: $\left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \vec{y} \right\rangle = \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$ ist die Länge der orthog. Projektion von $\vec{y}$ auf $G = \{\lambda \vec{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \vec{y} \right\rangle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ ist der Vektor der orthog. Projektion von $\vec{y}$ auf $G = \{\lambda \vec{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

iii. Orthogonale Zerlegung (Gegeben für $\vec{x} \neq 0, \vec{y} \in V$)



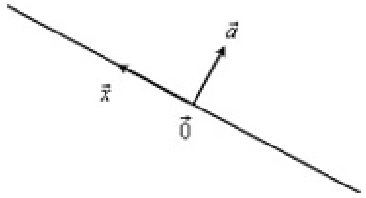
$\vec{y}_\parallel = \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \vec{y} \right\rangle \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x}$ (folgt aus Punkt ii.)

$\vec{y}_\perp = \vec{y} - \vec{y}_\parallel$ (folgt aus $\vec{y} = \vec{y}_\parallel + \vec{y}_\perp$)

$$\left.\begin{aligned} \langle \vec{y}_\perp, \vec{x} \rangle &= \langle \vec{y} - \vec{y}_\parallel, \vec{x} \rangle = \left\langle \vec{y} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x}, \vec{x} \right\rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle - \left\langle \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \\ &= \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|^2} \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}_{=\|\vec{x}\|^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{y}_\perp \perp \vec{x}$$

1.14 Implizite Darstellung von Geraden $\subseteq \mathbb{R}^2$ und Ebenen $\subseteq \mathbb{R}^3$

i. Geraden in $\mathbb{R}^2$



$G_0 = \{\vec{x} : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ beschreibt eine Gerade durch den Ursprung senkrecht zu $\vec{a}$

Sei $b \perp \vec{a}$, z.B. $\vec{b} := R\vec{a} = (-a_2, a_1)$

$G_0' = \{\lambda \vec{b} : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Beh.: $G_0 = G_0'$

Beweis:

$G_0' \subseteq G_0$: $\vec{x} = \lambda\vec{b} \Rightarrow \langle \vec{x},\vec{a}\rangle = \langle \lambda\vec{b},\vec{a}\rangle = \lambda\langle \vec{b},\vec{a}\rangle = 0$

$\Rightarrow \vec{x} \in G_0$

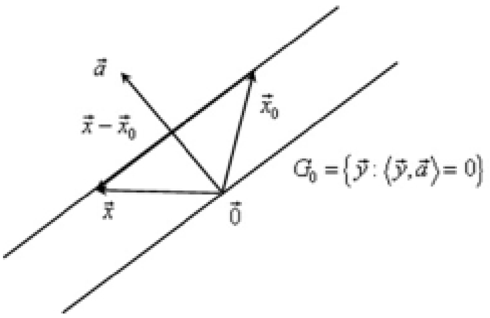
$G_0' \supseteq G_0$: sei $\vec{x} \in G_0$. Zerlege $\vec{x}$ orthogonal bezüglich $\vec{a}$

$\vec{x} = \vec{x}_{\|} + \vec{x}_{\perp} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

$0 = \langle \vec{x},\vec{a}\rangle = \langle \lambda\vec{a} + \mu\vec{b},\vec{a}\rangle = \lambda\|\vec{a}\|^2 \Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow \vec{x} = \mu\vec{b} \Rightarrow \vec{x} \in G_0'$

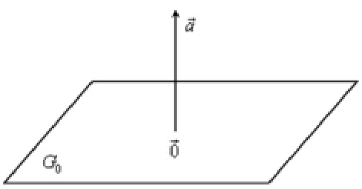
Insbesondere ist G_0 tatsächlich eine (Ursprungs-)Gerade.



$G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \vec{x}-\vec{x}_0,\vec{a}\rangle = 0\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \vec{x},\vec{a}\rangle = \alpha\}$; $\alpha = \langle \vec{x}_0,\vec{a}\rangle$

G beschreibt eine zu G_0 parallele Gerade durch $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. G ist dabei senkrecht auf $\vec{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Ist $\|\vec{a}\| = 1$ (also $\vec{a}$ ist Einheitsvektor), so ist $\vec{a}$ Einheitsnormale auf G (Hessesche Normalenform).

ii. Ebenen in $\mathbb{R}^3$ und sog. Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$



Analoge Beschreibung zu $\mathbb{R}^2$: $G_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{x},\vec{a}\rangle = 0\}$

beschreibt eine (Hyper-)Ebene senkrecht zu $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{x},\vec{a}\rangle = \alpha\}$ ist eine affine (Hyper-)Ebene durch den Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und senkrecht zu $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Ist $\|\vec{a}\| = 1$, so ist $\vec{a}$ Einheitsnormale auf G.

(Hessesche Normalenform).

1.15 Kanonische Basis

Sei $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$

$\vec{e}_1 := (1,0,0,...), \vec{e}_2 := (0,1,0,...), ..., e_i := (...,0,1,0,...)$

Bem.: $(e_i)_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

Ist $\vec{x} \in V$, $\vec{x} = (x_1,...,x_n)$, dann ist $\langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = x_1 (e_i)_1 + x_2 (e_i)_2 + ... + x_i (e_i)_i + ... + x_n (e_i)_n = x_i$ und stellt die Koordinaten von $\vec{x}$ dar.

$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$ ist eine Linearkombination. Diese Darstellung ist eindeutig.

1.16 Orientierung

i. Sei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$

Bezüglich eines Nullpunktes $\vec{0}$ sei $\vec{e}_1$ ein Ortsvektor in E_2. $\vec{e}_2$ erhält man, indem man $\vec{e}_1$ um 90° im Gegenuhrzeigersinn dreht. Das Koordinatensystem ist dann *positiv orientiert*. Die Drehung von $\vec{e}_1$ nach $\vec{e}_2$ definiert einen Drehsinn (Orientierung zur Winkelmessung).

Bem.: In Wahrheit hat der Vektorraum aber **keine** Orientierung. Man kann nur vergleichen und es gibt genau zwei Möglichkeiten.

ii. Sei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$

Bezüglich eines Nullpunktes $\vec{0}$ sei $\vec{e}_1$ ein Ortsvektor in E_3 und $\vec{e}_2$ ein zweiter Ortsvektor, der senkrecht auf $\vec{e}_1$ steht. Dreht man $\vec{e}_1$ auf dem kürzesten Weg auf $\vec{e}_2$, so gibt würde sich eine gleichermaßen gedrehte Schraube mit Rechtsgewinde in Richtung von $\vec{e}_3$ bewegen (Schraubenregel, Rechte-Hand-Regel).

1.17 Vektoren und Linearform

Def.: Linearform
Seien *V,W K*-Vektorräume, dann heißt $L: V \to W$ *linear*, falls
$L(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda L(\vec{x}) + L(\vec{y}) \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \wedge \lambda \in K$

Spezialfall $W = K$:
Die lineare Abbildung $L: V \to K$ heiß *Linearform* bzw. *lineares Funktional.*

Bsp.: $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$, $\vec{x} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$

I. Allgemein:

Für $\vec{a} \in V$ ist $L(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$ Linearform ($\vec{a}$ induziert Linearform)

Sei $V = K^n$ und $L: V \to K$ eine Linearform, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ kanonische Basis,
$a_i := \overline{L(\vec{e}_i)}$ und $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in K^n$, dann gilt:

$$L(\vec{x}) = L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i L(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{a}_i = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$$

Sei $V = K^n$, dann gibt es eine 1-1 Beziehung zwischen den Vektoren in *V* und den linearen Funktionalen (Linearformen) auf *V*. Der Raum $V^* := \mathfrak{L}(V, K) = \{L: V \to K, L \text{ ist Linearform}\}$ ist ein Vektorraum, der sog. *Dualraum* von *V*.

Def.: Der Vektorraum *V** heißt *Dualraum*

Man kann *V* und *V** identifizieren:

- Vektorraum *V*: Die Elemente von *V* heißen (kovariante) Vektoren oder Tensoren 1. Stufe. (Spaltenvektoren)
- Vektorraum *V**: Die Elemente von *V** heißen kovariante Vektoren. (Zeilenvektoren)

$K = \mathbb{R}$

$$L(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + ... + x_n a_n$$

II. Linearformen in der Physik

Die Kraft $\vec{F}$ ist ein Vektor. Man misst die Kraft durch die Arbeit, die man bei einer Verschiebung in eine Richtung leisten muss. Gemessen wird der Verschiebevektor $\vec{x} \mapsto W(\vec{x})$ (ist linear).

Laut Satz ist $W(\vec{x})$ als Skalarprodukt schreibbar: $W(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{F} \rangle$ mit $F_i = W(\vec{e}_i)$.

D.h. das Messverfahren zeigt, ob die physikalische Größe ein Vektor oder Linearform ist.

III. Vektorfelder

Physik: Abbildung Ort $\mapsto$ Vektor(Ort) $\in \mathbb{R}^3$
Mathematik: Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto \vec{v}(\vec{x})$ (Punkte $\mapsto$ Vektoren)

Visualisiert wird das Vektorfeld durch zeichnen von $\vec{v}(\vec{x})$ am Punkt $\vec{x}$.

Statt $W = \langle \vec{x}, \vec{F} \rangle$ muss man dann $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ betrachten.

1.18 Multilineare Abbildungen

Seien $V_1, \ldots, V_k, W$ Vektorräume über dem Körper K

Def.: Eine Abbildung $M : V_1 \times \ldots \times V_k \to W$ heißt *multilinear*, falls

$$M(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \lambda \vec{x}_i + \vec{y}_i, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_k)$$
$$= \lambda M(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_k) + M(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}_i, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_k)$$

$\forall \vec{x}_i, \vec{y}_i \in V_i \quad \forall \lambda \in K \quad \forall i = 1, \ldots, n$ gilt.

Bsp.: Kreuzprodukt $V \times V \to V$ $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \times \vec{y}$ ist antisymmetrisch

Skalarprodukt $V \cdot V \to \mathbb{R}$ $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ ist symmetrisch

Falls $k = 2$ heißt *M bilinear*.

M heißt symmetrisch, falls $M(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_k) = M(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_k)$

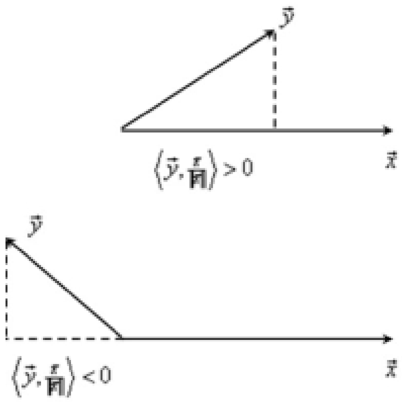
M heißt antisymmetrisch, falls $M(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_k) = -M(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_k)$

Ist $W = K$, dann heiß *M* auch Tensor k-ter Stufe (gilt noch allgemein).
Punktabhängige Version: Tensorfelder (Entscheidender Punkt: Verhalten unter Koordinatentransformation).

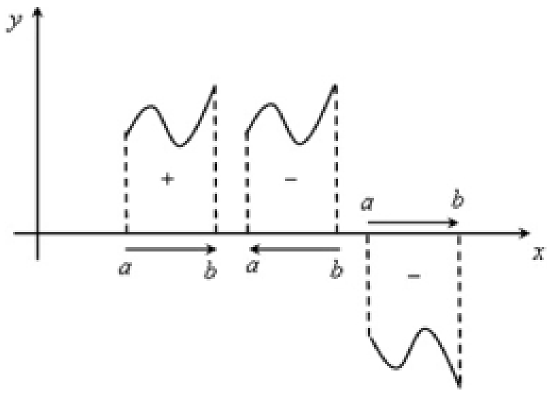
1.19 Flächeninhalt von Parallelogrammen

Bem.: Es gibt negative Längen und negative Flächeninhalte

Längen:



Flächeninhalt:



$$\int_a^b f(x)\,dx < 0 \text{ für } f(x) < 0$$

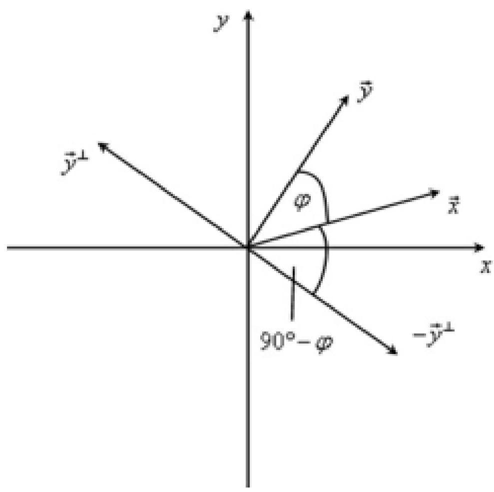
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Berechnung des Flächeninhalts eines Parallelogramms, dass durch $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannt wird:

E_2 sei euklidische Ebene mit orientiertem Koordinatensystem.

$\vec{x}, \vec{y} \in E_2 \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}^{\perp} = R\vec{y} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{x}, -\vec{y}^{\perp} \right\rangle &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ &= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \sphericalangle\left(\vec{x}, -\vec{y}^{\perp}\right) \\ &= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(90° - \varphi) \\ &= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$



$\|\vec{y}\| \cdot \sin(\varphi)$ ist die Höhe des Parallelogramms

Schreibweise: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} := x_1 y_2 - x_2 y_1$ heißt

Determinante der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$. Sie ist eine antisymmetrische Linearform.

1.20 Determinante in $\mathbb{R}^3$ und Kreuzprodukt

Für $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ definieren wir das Kreuzprodukt (Vektorprodukt):

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{pmatrix} x_2y_3-x_3y_2 \\ x_3y_1-x_1y_3 \\ x_1y_2-x_2y_1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

Die Koordinaten sind der orientierte Flächeninhalt der an die Koordinatenebenen projizierten, von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ausgespannten Parallelogramms.

$x_1y_2-x_2y_1$ ist der Inhalt des Parallelogramms, das Projektionen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ auf der (x,y)-Ebene aufspannen.

Rechenregeln:

1. $\vec{x}\times\vec{y}=-\vec{y}\times\vec{x}\Leftrightarrow\vec{x}\times\vec{x}=\vec{0}$ (antisymmetrisch)
2. $(\lambda\vec{x}+\vec{y})\times\vec{z}=\lambda(\vec{x}\times\vec{z})+\vec{y}\times\vec{z}$
3. $\langle\vec{x}\times\vec{y},\vec{w}\rangle=\langle\vec{y}\times\vec{w},\vec{x}\rangle=\langle\vec{w}\times\vec{x},\vec{y}\rangle$
   insbesondere $\langle\vec{x}\times\vec{y},\vec{x}\rangle=0=\langle\vec{x}\times\vec{y},\vec{y}\rangle$
4. $\langle\vec{x}\times\vec{y},\vec{u}\times\vec{v}\rangle=\langle\vec{x},\vec{u}\rangle\langle\vec{y},\vec{v}\rangle-\langle\vec{x},\vec{u}\rangle\langle\vec{y},\vec{u}\rangle=\begin{vmatrix}\langle\vec{x},\vec{u}\rangle & \langle\vec{x},\vec{u}\rangle \\ \langle\vec{y},\vec{u}\rangle & \langle\vec{y},\vec{v}\rangle\end{vmatrix}$
5. $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\times\vec{z}=\langle\vec{x},\vec{z}\rangle\vec{y}-\langle\vec{y},\vec{z}\rangle\vec{x}$

Beweis durch Nachrechnen: Wegen Bilinearität genügt es $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ als $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ zu wählen.

z.B. für 3. $\langle\vec{x}\times\vec{y},\vec{x}\rangle=\langle\vec{e}_1\times\vec{e}_2,\vec{e}_1\rangle=\langle\vec{e}_3,\vec{e}_1\rangle=0$ $\qquad$ $\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{e}_3$

Geometrische Interpretation:

i. Falls $\vec{x},\vec{y}$ parallel $\Rightarrow\vec{x}\times\vec{y}=0$

ii. $\vec{x}\times\vec{y}\perp\vec{x}$ und $\vec{x}\times\vec{y}\perp\vec{y}$

iii. $\|\vec{x}\times\vec{y}\|_2^2 = \langle \vec{x}\times\vec{y}, \vec{x}\times\vec{y}\rangle \overset{4.}{=} \|\vec{x}\|_2^2 \cdot \|\vec{y}\|_2^2 - \langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2$

$= \|\vec{x}\|_2^2 \cdot \|\vec{y}\|_2^2 - \|\vec{x}\|_2^2 \cdot \|\vec{y}\|_2^2 \cdot \cos^2 \sphericalangle(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}\|_2^2 \cdot \|\vec{y}\|_2^2 \cdot \sin^2 \sphericalangle(\vec{x},\vec{y})$

$\|\vec{x}\times\vec{y}\|_2 = \|\vec{x}\|_2 \cdot \|\vec{y}\|_2 \cdot \sin \sphericalangle(\vec{x},\vec{y})$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannt wird.

iv. $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$

Rechte-Hand-Regel: Daumen $\times$ Zeigefinger $=$ Mittelfinger

Allgemein $\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}$ sind rechtshändig orientiert

Resultat: $\vec{x}\times\vec{y}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der durch $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Ebene steht, dessen Länge dem Inhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht. $\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}$ sind dabei rechtshändig orientiert.

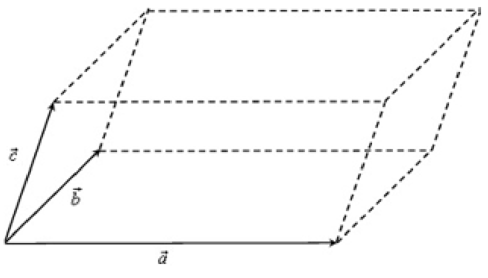
Bem.: Ist $S:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bilinear und antisymmetrisch und $S(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\vec{e}_3, S(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\vec{e}_1, S(\vec{e}_3,\vec{e}_1)=\vec{e}_2 \Rightarrow S(\vec{x},\vec{y})=\vec{x}\times\vec{y}$

1.21 Das Spatprodukt

$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}] := \langle \vec{x}\times\vec{y},\vec{z}\rangle$ für $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^3$

Die Rechenregeln für das Spatprodukt folgen aus 1.20

Interpretation: $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]$ ist das orientierte Volumen des von $\vec{x},\vec{y}$ und $\vec{z}$ aufgespannten Parallelepipeds oder Spat $=\{\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}+\nu\vec{z} : 0\le\lambda,\mu,\nu\le 1\}$.



Ergänzung: Sei $\vec{z}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Flusses, dann fließt pro Zeiteinheit durch das von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannte Parallelogramm das Volumen $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]$.

i. $$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

ii. Ist $S:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ multilinear und antisymmetrisch und $S(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=1 \Rightarrow S(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]$

1.22 Lineare Gleichungssysteme

Def.: Ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) ist ein System von k Gleichungen für n Unbekannte $x_1,...,x_n \left(\in K = \mathbb{R} \wedge \mathbb{C}\right)$ der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

Dabei heißt das Gleichungssystem *homogenes LGS*, falls $b_1 = b_2 = ... = b_k = 0$, sonst *inhomogenes LGS*. Ist ein LGS inhomogen, so heißt das LGS mit denselben a_{ij} aber mit $b_1 = b_2 = ... = b_k = 0$ das *zugehörige homogene LGS*.

Geometrische Interpretation:

i. Sei $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, ..., \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in K^k$

Gesucht sind die Koeffizienten einer Linearkombination $x_1,...,x_n$, so dass $x_1\vec{a}_1 + ... + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$ gilt.

ii. Für $1 \le i \le k$ setzte

$H_i = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_1a_{i1} + ... + x_na_{in} = b_i \right\}$ ist eine Hyperebene in K^n. Gesucht ist $\vec{x} \in K^n$ mit $\vec{x} \in H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_k$ (Schnittmengen von Hyperebenen)

Mathematische Interpretation:

Die Abbildung $A: K^n \to K^k$, $x \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i \end{pmatrix} = A\vec{x}$ ist linear.

Finde für ein gegebenes $\vec{b} \in K^k$ ein Urbild aus $\vec{x} \in K^n$, d.h. $A\vec{x} = \vec{b}$. Das Auflösen entspricht der Bestimmung einer Umkehrabbildung, falls dies möglich ist.

1.23 Gaußsches Eliminationsverfahren

Falls das LGS die Form hat:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{kk}x_k + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

Dann ist das LGS lösbar, indem man von unten nach oben einsetzt.

Beispiele:

$$\left|\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}\right| \begin{aligned} & \\ & II - I \\ & III - I \end{aligned}$$

$$\left|\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 1 \\ -x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -2x_2 + 7x_3 &= 2 \end{aligned}\right| \begin{aligned} & \\ & \\ & III - 2 \cdot II \end{aligned}$$

$$\left|\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 1 \\ -x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_3 &= 0 \end{aligned}\right|$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 4x_3 - 1 = -1 \\ x_1 &= -3x_2 + 5x_3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

$$\left|\begin{aligned} -x_2 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}\right| \begin{aligned} & \\ & \\ & III - II \end{aligned}$$

$$\left|\begin{aligned} -x_2 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}\right|$$

Widerspruch; keine Lösung

Def.: Das LGS hat *Zeilenstufenform (ZSF)*, falls für jedes $i < j$ in der j-ten Zeile links mehr Nullen stehen, als in der i-ten.

$$\begin{array}{cccccl} 0 & 0 & a_{1l_1}x_{i_1} & + \cdots & \cdots & = b_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{2l_2}x_{i_2} & \cdots & = b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & = b_l \\ & & & & \vdots & = \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = b_{l+1} \\ & & & & 0 & = b_k \end{array}$$

Falls eines der $b_{l+1}, \ldots, b_k \neq 0$ ist, so hat das LGS keine Lösung, sonst kann man das System lösen (eventuell mehrdeutig).

Der Gauß'sche Algorithmus:

Bringe das LGS in ein äquivalentes LGS in ZSF.

i. Durch Vertauschen von Zeilen erreicht man, dass keine Zeile weiter nach links geht als die erste Zeile

ii. Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeile auf die folgenden Zeilen erreicht man, dass jede Zeile weniger nach links geht als die erste Zeile

iii. Iteriere dies nun für alle folgenden Zeilen

2. Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimensionen

2.1 Problematik

i. $\{\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \mu\vec{c} : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$ kann $\mathbb{R}^3$ selbst, Ebene, Gerade oder $\vec{0}$ sein.
$\rightarrow$ lineare Unabhängigkeit

ii. Auch Funktionen sind Vektoren
$g_1, ..., g_n, f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen
Finde $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ für $\lambda_1 g_1 + ... + \lambda_n g_n = f$
$\rightarrow$ Koordinaten

iii. Wie groß ist ein Vektorraum
$\rightarrow$ Dimension

2.2 lineare Hülle

Def.: Sei *V* ein Vektorraum über *K* und $W \subseteq V$
$\langle W \rangle = \operatorname{lin}(W) := \left\{ \vec{v} \in V : \exists n \in \mathbb{N}, \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in K, \exists \vec{w}_1, ..., \vec{w}_n \in W, \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \right\}$ ist die Menge aller Linearkombinationen aus W und heiß *lineare Hülle* oder Aufspann von *W*. *W* heißt erzeugendes System für $\operatorname{lin}(W)$

Bem.: Die lineare Hülle ist ein Untervektorraum von *V*.
Häufig besteht *W* aus endlich vielen Elementen $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$.

Dann ist $\operatorname{lin}(W) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 \vec{w}_i : \lambda_i \in K \right\}$.

$\operatorname{lin}(\varnothing) = \{0\}$ (Σ über Indexmenge 0 durch Konvention festgelegt)

Beispiele:

i. $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ $\quad W = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} \Rightarrow \operatorname{lin}(W) = V$

ii. $V = \mathbb{R}^3$, $\quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \operatorname{lin}(W) = \text{xy-Ebene}$

iii. $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ $\quad W = \{x \mapsto x^n : n \in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow \operatorname{lin}(W) = \{\text{Polynome}\}$

iv. $\operatorname{lin}(V) = V$

2.3 Satz

Seien $\vec{v},...,\vec{v}_n \in V \ (n \geq 1)$ ein System von n Vektoren, dann sind äquivalent:

a. Ist $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$, so sind die λ_i eindeutig.

   D.h. $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$ und $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{v}_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i ; \forall i = 1,...,n$

b. Ist $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$, so gilt $\lambda_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$

c. Keiner der Vektoren $\vec{v},...,\vec{v}_n$ ist eine Linearkombination der anderen.

d. Die lineare Hülle von jedem echten Teilsystem von $\vec{v},...,\vec{v}_n$ ist echte Teilmenge von $\operatorname{lin}\left(\{\vec{v},...,\vec{v}_n\}\right)$.

Beweis:

a. $\Rightarrow$ b. $\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \vec{v}_i = \vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \overset{\text{a.}}{\Rightarrow} \lambda_i = 0, \forall i$

b. $\Rightarrow$ a. Sei $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$ und $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{v}_i$,

dann $\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \vec{v}_i \overset{\text{b.}}{\Rightarrow} \lambda_i - \mu_i = 0, \forall i$

b. $\Rightarrow$ c. (also $\neg$c. $\Rightarrow \neg$b.)

oBdA $\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{0} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{v}_i - \vec{v}_n$ also gilt b. auch nicht

c. $\Rightarrow$ b. (also $\neg$b. $\Rightarrow \neg$c.)

Ist $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$ mit $\lambda_n \neq 0$,

dann $v_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_n} \vec{v}_i$ also gilt c. auch nicht

c. $\Leftrightarrow$ d. $\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{v}_i \Leftrightarrow \operatorname{lin}\left(\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}\right) = \operatorname{lin}\left(\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_{n-1}\}\right)$

2.4 Definition: lineare Unabhängigkeit und Koordinaten

i. Das System der Vektoren $\{\vec{v}_1,...\vec{v}_n\}$ heißt *linear unabhängig*, falls eine Bedingung des Satzes 2.3 gilt. Andernfalls sind die Vektoren *linear abhängig*. ($\varnothing$ sei linear unabhängig)

ii. Allgemeiner heißt $(\vec{\sigma}_i)_{i\in I} = \{\vec{\sigma}_i : i \in I\}$ *linear unabhängig*, falls jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist.

iii. Ist $V = \operatorname{lin}(\{\vec{v}_1,...\vec{v}_n\})$ (oder $V = \operatorname{lin}(\{\vec{v}_i : i \in I\})$) und die $\{\vec{v}_1,...\vec{v}_n\}$ bzw. $\operatorname{lin}(\{\vec{v}_i : i \in I\})$ linear unabhängig, so heißt $\{\vec{v}_1,...\vec{v}_n\}$ bzw. $\{\vec{v}_i : i \in I\}$ eine *Basis* von *V*. Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugungssystem.

Bemerkungen:

- In diesem Fall gilt also: Jeder Vektor von *V* lässt sich auf genau eine Weise als endliche Linearkombination von Vektoren in $\{\vec{v}_i : i \in I\}$ schreiben.

- Sei $\{\vec{v}_i : i \in I\}$ Basis von *V* und $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$, so heißen die Koeffizienten λ_i auch die *Koordinaten* von $\vec{w}$ bezüglich dieser Basis. $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ ist Koordinatenvektor.

- Sei $\{\vec{v}_i : i \in I\}$ Basis von *V*, so ist die Dimension von $V = n$.
  $\dim V = n$ (Später: Die Dimension ist unabhängig von der Basis)

Beispiele:

i. $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$ ist kanonische Basis in $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$ ist n-dimensional (über $\mathbb{R}$)

ii. $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ (bzw. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$) sind linear unabhängig und Basis der Polynome.
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x^i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Bezeichnung:

Sei $\{\vec{v}_1,...\vec{v}_n\}$ Basis von *V*, $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$, dann heißen $\lambda_1,...,\lambda_n$ die Koordinaten von $\vec{w}$.

$(\lambda_1,...,\lambda_n)$ heißt Koordinatenvektor. Später: Die Dimension eines Vektorraums entspricht der Anzahl der Basisvektoren.

2.5 Diskussion für $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

i. Falls $0 \in \{\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n\}$, dann ist $\{\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n\}$ linear abhängig.
Insbesondere ist $\{\vec{v}\}$ linear abhängig $\Leftrightarrow \vec{v} = 0$

ii. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow \vec{v}_1 = 0 \vee \vec{v}_2 = 0 \vee \lambda\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$

iii. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3 \begin{cases} \text{lin. unabhängig} \Leftrightarrow \operatorname{lin}\left(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}\right) = \mathbb{R}^3 \\ \text{lin. abhängig} \Leftrightarrow \operatorname{lin}\left(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}\right) = \text{ Ebene, Gerade oder 0-Vektor} \end{cases}$

iv. $\{\vec{v}_i : i \in I\}$ ist lin. unabhängig $\Rightarrow$ jede Teilmenge ist lin. unabhängig

v. $\{\vec{v}_i : i \in I\}$ ist lin. unabhängig $\Rightarrow \{\vec{v}_i : i \in I\}$ ist Basis von $\operatorname{lin}\left(\{\vec{v}_i : i \in I\}\right)$

vi. $\{\vec{v}_i : i \in I\}$ ist Basis von V, $\vec{w} \in V \Rightarrow \{\vec{w}\} \cup \{\vec{v}_i : i \in I\}$ ist lin. anhängig

2.6 Beispiele

i. $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ ist die Basis von K^n

ii. Sei $p_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ oder $p_n : \mathbb{C} \ni z \mapsto z^n \in \mathbb{C}$, dann ist $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ im Vektorraum der Funktionen lin. unabhängig.

Beweis: $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

iii. Die Funktionen auf $[0; 2\pi]$
$y = 1 = const.$, $\{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ sind lin. unabhängig

iv. Sind $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in K^n$, so dass $\vec{a}_j$ links mehr Nullen hat als $\vec{a}_i$ für $j < i$, dann sind $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ lin. unabhängig.

2.7 Orthonormalensystem (ONS)

Def.: $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *Orthonormalensystem*, falls $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 : i = j \\ 0 : i \neq j \end{cases}$

d.h. $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j : i \neq j$ und $\|\vec{e}_i\| = 1$

Beispiele:

- Die kanonische Basis ist ein ONS
- $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = R\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

Satz: $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_k\}$ ist ONS $\Rightarrow \{\vec{e}_1,...,\vec{e}_k\}$ ist lin. unabhängig.

Beweis: $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i \Rightarrow 0 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i, \vec{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \lambda_j \forall j$

2.8 Koordinatenabbildung

Mit linear unabhängigen Vektoren kann man Koordinaten einführen

Def.: Sei $\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\} \subseteq V$

$$T : K^n \to V, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \in V$$

Dann ist T linear.

Satz:

1. $\text{lin}(\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}) = V \Leftrightarrow T$ ist surjektiv $(T(K^n) = V)$
2. $\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}$ ist lin. unabhängig $\Leftrightarrow T$ ist injektiv $(T(\vec{v}_1) = T(\vec{v}_2) \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2)$
3. $\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}$ ist Basis von $V \Leftrightarrow T$ ist bijektiv

Beweis:

1. T ist surjektiv $\Leftrightarrow T(K^n) = V \Leftrightarrow \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i : \lambda \in K \right\}}_{=\text{lin}(\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\})} = V$

2. $T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\vec{v}_i\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\mu_i)\vec{v}_i=0$

   Also ist *T* nicht injektiv $\Leftrightarrow\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}$ nicht lin. unabhängig.

3. Folgt aus 1. und 2.

2.9 Definition: Vektorraum-Isomorphismus

Sei *V*, *W* Vektorraum über *K*

Ist $T:V\to W$ linear und bijektiv, so heißt *T (Vektorraum-)Isomorphismus*. Dann ist auch T^{-1} Vektorraum-Isomorphismus. *V* und *W* heißen *isomorph*, falls es einen Vektorraum-Isomorphismus $T:V\to W$ gibt (Schreibweise: $V\cong W$)

Isomorphe Vektorräume sind als Vektorraume gleich.

Ist $\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}$ Basis von *V*, so ist *V* isomorph zu K^n .

2.10 Beispiel: $V=\{\text{Polynome von Grad }\le n\};K=\mathbb{R}$

i. Ist $p_0=1,p_1=x,...,p_n=x^n$, dann ist $\{p_0,...,p_n\}$ Basis von V_n und

   $T:\mathbb{R}^{n+1}\to V,\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\mapsto a_0+a_1x+...+a_nx^n$ ist Vektorraum-Isomorphismus

ii. Andere Basis: $p_0=1,p_1=x-17,p_2=(x-17)^2,...,p_n=(x-17)^n$

2.11 Frage: Besitzt jeder Vektorraum eine Basis?

Def.: Ein Vektorraum *V* heißt *endlich erzeugt*, falls es endlich viele Vektoren $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\in V$ gibt mit $V=\text{lin}(\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\})$.

2.12 Entscheidender Satz zu Basen

Satz: Sei *V* Vektorraum

1. Ist *V* endlich erzeugt, so besitzt *V* eine Basis.
2. Besitzt *V* eine Basis aus *n* Elementen, so sind $n+1$ Vektoren in *V* linear abhängig.
3. Besitzt *V* eine Basis aus *n* Elementen, so hat jede Basis von *V* ebenfalls *n* Elemente.

Beweis:

1. Durch Ausdünnen:
   Sei $V = \text{lin}\left(\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}\right)$. Streiche diejenigen Vektoren heraus, die von den vorausgehenden Vektoren linear abhängig sind.
   $$\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\cancel{\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}},\cancel{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2. Nach 2.9 gilt $V \cong K^n$. Es genügt also die Behauptung für K^n zu beweisen.

   Seien $n+1$ Vektoren in K^n gegeben $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots \\ a_{n1}\end{pmatrix},...,\vec{a}_{n+1} = \begin{pmatrix}a_{1(n+1)}\\ \vdots \\ a_{n(n+1)}\end{pmatrix}$

   $\vec{a}_i$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\vec{a}_i = 0$ eine nichttriviale Lösung hat ($\lambda_i = 0$).

   $$\underbrace{\left.\begin{array}{r}\lambda_1 a_{11} + ... + \lambda_{n+1}a_{1(n+1)} = 0\\ \vdots = \vdots\\ \lambda_n a_{n1} + ... + \lambda_{n+1}a_{n(n+1)} = 0\end{array}\right\}}_{n+1 \text{ Spalten}} n \text{ Zeilen}$$

   Gaußsches Eliminationsverfahren $\Rightarrow$ Es existiert eine nichttriviale Lösung $\lambda_1,...,\lambda_{n+1}$, bei der nicht alle $\lambda_i = 0$ ist.

   Allgemeiner Fall:

   Ist die Basis von *n* Elementen $\vec{v}_i$ gegeben, dann betrachte $K^n \ni \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{v}_i \in V$ ist Vektorraum-Isomorphismus. Nimm die Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$ für jeden der $n+1$ Vektoren und wende Fall K^n an.

3. Sei $\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}$ Basis von *V* und $\{\vec{w}_1,...,\vec{w}_k\}$ ebenfalls Basis von *V*.

   Wäre $k > n \overset{2.}{\Rightarrow} \{\vec{w}_1,...,\vec{w}_k\}$ ist lin. abhängig $\Rightarrow$ keine Basis.

   Wäre $k < n \overset{2.}{\Rightarrow} \{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}$ ist lin. abhängig $\Rightarrow$ keine Basis.

   Widerspruch! □

Folgerung: Jeder endlich erzeugte Vektorraum ist isomorph zu genau einem K^n für genau ein *n*.

2.13 Definition: Dimension von *V*

Ist $\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n : n \in \mathbb{N}\}$ Basis von *V*, dann heißt *n* die *Dimension von V* (Schreibweise $\dim V = n$). *n* ist eindeutig bestimmt. Besitzt *V* keine endliche Basis, dann heißt *V* *unendlich-dimensional* ($\dim V = \infty$)

2.14 Bemerkung

- Satz 2.12 (1) gilt allgemein, auch wenn *V* nicht endlich erzeugt ist. Jeder Vektorraum hat eine Basis. Beweis durch „Zorn'sches Lemma".
- Oft wird der Satz 2.12 durch den „Basisergänzungssatz" bewiesen:
  Sind $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n$ linear unabhängig, $\vec{w}_1,...,\vec{w}_n \in V$, $\operatorname{lin}\left(\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n,\vec{w}_1,...,\vec{w}_n\}\right) = V$, so kann man geeignete $\vec{w}_i$'s zu den $\vec{v}_i$'s hinzunehmen, um eine Basis von *V* zu erhalten.

2.15 Korollar

Sei *V* ein *n*-dimensionaler Vektorraum, dann gilt:

i. $U \subseteq V$ Untervektorraum $\Rightarrow \dim U \leq \dim V$

ii. $U \subseteq V$ Untervektorraum, $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$

Beweis:

i. Linear unabhängige Vektoren in *U* sind auch linear unabhängig in *V*
$\Rightarrow$ Anzahl der Basen von $U \leq$ Anzahl der Basen von *V*

ii. $\dim V = \dim U \Rightarrow$ *U* und *V* sind isomorph zu $K^n \Rightarrow U = V$

2.16 Allgemeine Skalarprodukte

Def.: *V* sei Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $V \times V \to K$, $(\vec{u},\vec{v}) \mapsto \langle \vec{u},\vec{v} \rangle$ heißt *Skalarprodukt*, falls $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V, \forall \lambda \in K$ gilt:

(SP1) Linearität: $\langle \lambda\vec{u} + \mu\vec{v},\vec{w} \rangle = \lambda\langle \vec{u},\vec{w} \rangle + \mu\langle \vec{v},\vec{w} \rangle$

(SP2) Symmetrie: $\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v},\vec{u} \rangle}$

(SP3) Positivität: $\langle \vec{u},\vec{u} \rangle \geq 0$, $\langle \vec{u},\vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$

Allgemeine Norm: Positivität, Homogenität, Dreiecksungleichung
Spezielle Norm: $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\left(V,\langle .,.\rangle\right)$ heißt:

- Für $\dim V<\infty$, $K=\mathbb{R}$ euklidisch
- Für $\dim V<\infty$, $K=\mathbb{C}$ unitär
- Für $\dim V=\infty$ prä-Hilbert

Diskussion:

- (SP1):
  $\forall\vec{w}\in V$ ist $V\to K$, $\vec{u}\mapsto\langle\vec{u},\vec{w}\rangle$ linear (Linearform)
  (falls $\dim V<\infty$ sieht jede Linearform so aus)
- (SP1) & (SP2):
  $\forall\vec{w}\in V$ ist $V\to K$, $\vec{u}\mapsto\langle\vec{w},\vec{u}\rangle$ antilinear ($K=\mathbb{C}$)
  d.h. $\langle\vec{w},\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle\vec{w},\vec{u}\rangle+\bar{\mu}\langle\vec{w},\vec{v}\rangle$
- (SP2):
  $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle=\overline{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}\Rightarrow\langle\vec{u},\vec{u}\rangle\in\mathbb{R}$
- $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0\ \ \forall\vec{v}\in V\Leftrightarrow\vec{u}=0$ (setzte $\vec{v}=\vec{u}$)
- In der Physik ist das Skalarprodukt in der ersten Komponente anti-/konjugiert- linear.

2.17 Beispiel

1. Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\sum u_i\bar{v}_i$
2. Analysis und Physik:
   Sei $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ Intervall für $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ stetig
   $\langle f,g\rangle:=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\otimes dx$ Bei $\otimes$ darf auch noch eine feste pos. Funktion stehen
   Ziel: $\|\vec{u}\|:=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}$ definiert Norm

2.18 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Satz: Für alle $\vec{x},\vec{y}\in V$ gilt:

$$\left|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\right|\leq\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}\cdot\sqrt{\langle\vec{y},\vec{y}\rangle}$$

$\left|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\right|=\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}\cdot\sqrt{\langle\vec{y},\vec{y}\rangle}$ gilt genau dann, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear abhängig sind.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle \cdot \overline{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle} \le \langle \vec{x},\vec{x}\rangle \cdot \langle \vec{y},\vec{y}\rangle$ ($|z|^2 = z\cdot \bar{z}$).

i. Ist $\vec{y}=0$, so ist die Ungleichung trivial.

ii. Ist $\vec{y}\neq 0$, setzte $\alpha := \frac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}{\langle \vec{y},\vec{y}\rangle}$.

$$0 \le \langle \vec{x}-\alpha\vec{y}, \vec{x}-\alpha\vec{y}\rangle$$
$$0 \le \langle \vec{x},\vec{x}\rangle - \alpha\langle \vec{y},\vec{x}\rangle - \bar{\alpha}\langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \underbrace{\alpha\bar{\alpha}\langle \vec{y},\vec{y}\rangle}_{=\bar{\alpha}\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}$$
$$\alpha\langle \vec{y},\vec{x}\rangle \le \langle \vec{x},\vec{x}\rangle^{*)}$$
$$\frac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}{\langle \vec{y},\vec{y}\rangle}\langle \vec{y},\vec{x}\rangle \le \langle \vec{x},\vec{x}\rangle$$
$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle\overline{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle} \le \langle \vec{x},\vec{x}\rangle\langle \vec{y},\vec{y}\rangle$$

Gleichheitsdiskussion:

$\Leftarrow$ Setzte $\vec{y}=\lambda\vec{x}$

$\Rightarrow$ Nur bei *) abgeschätzt
Falls Gleichheit gilt, ist $\vec{x}-\alpha\vec{y}=0 \Rightarrow \vec{x},\vec{y}$ sind linear abhängig. □

2.19 Skalarprodukt induziert Norm

Satz: Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, dann ist $\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x},\vec{x}\rangle}$ eine Norm auf *V*.

Beweis:

Positivität: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x},\vec{x}\rangle} \ge 0$, $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}=0 \Leftarrow$ (SP3)

Homogenität: $\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{\langle \lambda\vec{x},\lambda\vec{x}\rangle} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle \vec{x},\vec{x}\rangle} = |\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$

Dreiecksungleichung:
$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle = \langle \vec{x},\vec{x}\rangle + \langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \langle \vec{y},\vec{x}\rangle + \langle \vec{y},\vec{y}\rangle$$
$$= \|\vec{x}\|^2 + \langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \overline{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle} + \|\vec{y}\|^2$$
$$= \|\vec{x}\|^2 + 2\cdot \mathrm{Re}\langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2$$
$$\le \|\vec{x}\|^2 + 2\cdot |\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| + \|\vec{y}\|^2$$
$$\overset{*)}{\le} \|\vec{x}\|^2 + 2\cdot\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2$$
$$= (\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2$$

*): Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Skalarprodukt $\xrightarrow{\|\vec{x}\|=\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}}$ Norm:

Diese Zuordnung ist:

- Injektiv, wegen $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$
- Nicht surjektiv (d.h. die meisten Normen werden nicht von Skalarprodukten induziert)

Grund: $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \overline{\langle\vec{y},\vec{x}\rangle} \Rightarrow \langle\vec{x},\vec{x}\rangle = \overline{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} \Rightarrow \langle\vec{x},\vec{x}\rangle \in \mathbb{R}$, wie für Norm nötig.

2.20 Quadratische Form

Def.: Die Abbildung $Q: V \to \mathbb{R}_+,\ \vec{v} \mapsto Q(\vec{v}) := \langle\vec{v},\vec{v}\rangle = \|\vec{v}\|^2$ heißt die zugehörige *quadratische Form* zum Skalarprodukt
(denn aus der Homogenität folgt: $Q(\lambda\vec{v}) = |\lambda|^2 \cdot Q(\vec{v})$).

i. Ist $K=\mathbb{R}$ so gilt: $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \frac{1}{4}\left(Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}-\vec{y})\right)$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\left(Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}-\vec{y})\right)\\
&= \tfrac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)\\
&= \tfrac{1}{4}\left(\langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}\rangle + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle - \langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}\rangle - \langle\vec{y},\vec{y}\rangle\right)\\
&= \tfrac{1}{4}\left(2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + 2\langle\vec{y},\vec{x}\rangle\right) = \tfrac{1}{4}\left(2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + 2\overline{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle}\right) \overset{K=\mathbb{R}}{=} \tfrac{1}{4}\left(4\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\right)\\
&= \langle\vec{x},\vec{y}\rangle
\end{aligned}
$$

ii. Ist $K=\mathbb{C}$ so gilt: $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \frac{1}{4}\left(Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}-\vec{y}) - iQ(\vec{x}-i\vec{y}) + iQ(\vec{x}+i\vec{y})\right)$

Das Skalarprodukt ist bereits vollständig durch die Werte von $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$ bestimmt. D.h. es wird durch die zugehörige Norm oder quadratische Form vollständig festgelegt.

2.21 Orthogonalität

V sei Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

i. $\vec{x},\vec{y} \in V$ heißen orthogonal, $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0$
$\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ Satz des Pythagoras
$M, N \subseteq V$ heißen orthogonal, $M \perp N \Leftrightarrow \langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0 \quad \forall\vec{x} \in M \forall\vec{y} \in N$

ii. $M \subseteq V \to M^{\perp} := \{\vec{y} \in V : y \perp x, \forall x \in M\}$ heißt orthogonales Komplement von M.

iii. Eine Familie $(\vec{v}_i)_{i\in I}$ heißt Orthonormalensystem (ONS), wenn $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in I$.
Ist $(\vec{e}_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalensystem, das Basis von V ist, dann heißt es Orthonormalenbasis (ONB).

Beispiel:

- $\vec{e}_i = (0,...,0,1,0,...,0)$ ist ONB für den Raum der Folgen
  $\{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i \in \mathbb{N}\}$
- $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ ist ONB von $\mathbb{R}^2$, Standardskalarprodukt.

2.22 Entwicklung nach ONS

Sei $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$ ONB von *V*.

1. Ist $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i \Rightarrow \lambda_i = \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle$, d.h. $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$

2. Ist $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{e}_i$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$, so ist

   $$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overline{\lambda_i}$$

   Die Koordinatenabbildung $T : K^n \to V$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$ führt das

   Standardskalarprodukt auf K^n über in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Parseval-Gleichung: $\vec{u} \in V$

$$\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{u}, \vec{e}_i \rangle|^2$$

2.23 Beispiel: Fourierreihen periodischer Funktionen

$$V = C([0,2\pi]) = \{ f : [0,2\pi] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx \qquad \| f \| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(x) dx}$$

$\Rightarrow \langle .,. \rangle$ ist Skalarprodukt

$$e_0(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \|e_0\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx} = \left[\tfrac{1}{2\pi} x\right]_0^{2\pi} = 1$$

$$e_{2n}(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx); n \geq 1$$

$$e_{2n-1}(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx); n \geq 1$$

Dann ist $\{e_n : n \geq 0\}$ ONS (insbesondere linear unabhängig)

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)\, dx = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} \sin(2x)\, dx = 0$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 1$$

Es gilt: Ist $f \in \operatorname{lin}(\{e_0, ..., e_n\})$, dann ist $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_n a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$ mit

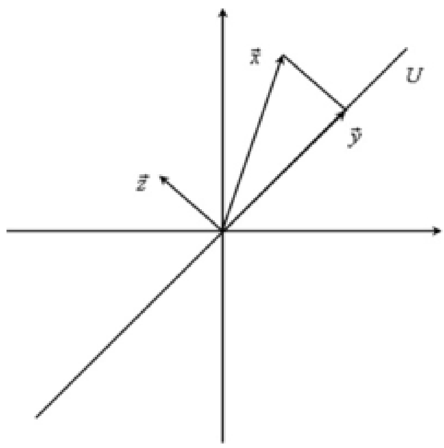
$$c = \langle f, e_0 \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx, \quad a_n = \langle f, e_{2n-1} \rangle = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx,$$

$$b_n = \langle f, e_{2n} \rangle = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \ .$$

Fourrier-Reihen: Erlaubt man unendliche Summen (Konvergenzproblem!), dann lässt sich jede stetige Funktion darstellen als $f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_i$.

2.24 Orthogonale Projektion auf Unterräume

Satz: Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, $\vec{x} \in V$, für $U \subseteq V$ sei $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m\}$ ONB mit $m = \dim U$. Dann sind für $\vec{y} \in U$ äquivalent:



a. $\vec{y} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{e}_i$ mit $\lambda_i = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle$

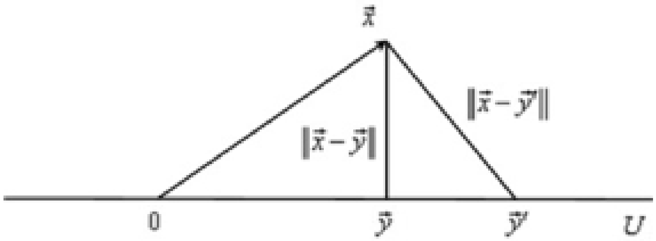
λ_i ist die Länge der Projektion von $\vec{x}$ auf die Gerade in Richtung $\vec{e}_i$.

b. $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, wobei $(\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}) \perp U$

d.h. $\vec{y}$ ist die orthogonale Projektion von $\vec{x}$ auf U

c. $\|\vec{x}-\vec{y}\| \leq \|\vec{x}-\vec{y}'\| \quad \forall \vec{y}' \in U$

d.h. $\vec{y}$ hat unter allen Vektoren von U den minimalen Abstand zu $\vec{x}$



Beweis:

a. $\Rightarrow$ b. sei $\vec{y}' \in U$ beliebig, $\vec{y}' = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{e}_i$

zu zeigen ist: $\langle \vec{z}, \vec{y}' \rangle = 0$

$$\langle \vec{z}, \vec{y}' \rangle = \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{y}' \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}' \rangle - \langle \vec{y}, \vec{y}' \rangle = \sum_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle}_{=\lambda_i} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{\mu}_i = 0$$

b. $\Rightarrow$ a. Sei $\vec{y} \in U$ mit $(z = x - y) \perp U$, dann gilt

$$\langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle = \langle \vec{x}-\vec{z}, \vec{e}_i \rangle = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle - \underbrace{\langle \vec{z}, \vec{e}_i \rangle}_{=0} = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = \lambda_i$$

$\vec{e}_i$ ist ONB $\Rightarrow \vec{y} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{e}_i$

b.,a. $\Rightarrow$ c. Sei $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{z} \perp U$

Sei $\vec{y}' \in U$ beliebig, $\vec{y}' = \vec{y} + \vec{\vec{y}}$ mit $\vec{\vec{y}} \in U$

$$\Rightarrow \|\vec{x}-\vec{y}'\|^2 = \|\vec{y}+\vec{z}-\vec{y}-\vec{\vec{y}}\|^2 = \|\vec{z}-\vec{\vec{y}}\|^2 \overset{\vec{z}\perp\vec{\vec{y}}}{=} \|\vec{z}\|^2 + \|\vec{\vec{y}}\|^2 \geq \|\vec{z}\|^2$$

und $\|\vec{x}-\vec{y}'\|^2 = \|\vec{z}\|^2 \Leftrightarrow \vec{\vec{y}} = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{y}'$

Def.: Für $\vec{x} \in V$ $\exists \vec{y} \in U$ mit $\|\vec{x}-\vec{y}\|$ minimal ist. Die Abbildung $P: V \to U$,

$\vec{x} \mapsto \vec{y} = \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$ ist linear und heißt *orthogonale Projektion* von V auf U.

2.25 Das Gram-Schmidtsche-Orthonormalisierungsverfahren

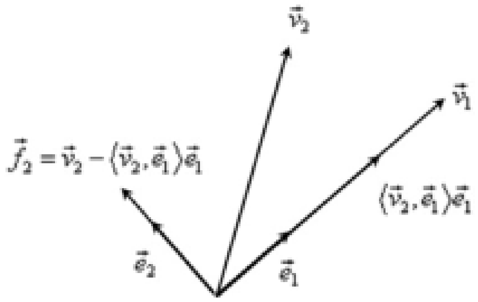
Gegeben sind linear unabhängige Vektoren. Konstruiere daraus ein Orthonormalensystem.

Satz: Sei $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprodukt, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\}$ sei eine endliche oder abzählbare Familie linear unabhängiger Vektoren. Dann gibt es ein ONS $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\}$ in V, so dass $\mathrm{lin}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}) = \mathrm{lin}(\{\vec{e}_1,, ..., \vec{e}_k\})$ $\forall 1 \leq k \leq \dim V$.

Beweis:

1. $\vec{e}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$

2. $\vec{f}_2 := \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_2 := \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|}$



$\langle \vec{f}_2, \vec{e}_1 \rangle = 0$ ✓

3. Seien $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{k-1}$ schon bestimmt mit $\operatorname{lin}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{k-1}\}) = \operatorname{lin}(\{\vec{e}_1, ,..., \vec{e}_{k-1}\})$.

   Setzte $\vec{f}_k := \vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{v}_k, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$

   $\sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{v}_k, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$ ist die Projektion von $\vec{v}_k$ auf $\operatorname{lin}(\{\vec{e}_1, ,..., \vec{e}_{k-1}\})$

   $\Rightarrow \vec{f}_k \neq 0$, weil $\vec{v}_k$ von $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{k-1}$ linear unabhängig ist.

   Setzte $\vec{e}_k := \frac{\vec{f}_k}{\|\vec{f}_k\|}$

   Prüfe nach, ob $\langle \vec{f}_k, \vec{e}_i \rangle = \langle \vec{v}_k, \vec{e}_i \rangle - \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{v}_k, \vec{e}_j \rangle \underbrace{\langle \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle}_{\delta_{ij}}}_{\langle \vec{v}_k, \vec{e}_i \rangle} = 0$ gilt. □

Folgerung: Ist $\dim V < \infty$, so besitzt V ONB und jedes ONS lässt sich zu ONB ergänzen.

3. Lineare Abbildungen und Matrizen

3.1 Erinnerung: Linear Abbildungen und linear Teilräume

- *V, W* seien Vektorräume über *K*
  $A: V \to W$ ist linear $\Leftrightarrow A(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \lambda A(\vec{u}) + A(\vec{v}) \;\; \forall \vec{u},\vec{v} \in V, \lambda \in K$ gilt.

- $V_0 \subseteq V$ ist ein Untervektorraum (linearer Teilraum) $\Leftrightarrow \lambda\vec{u}+\vec{v} \in V_0 \;\; \forall \vec{u},\vec{v} \in V_0, \lambda \in K$ gilt.

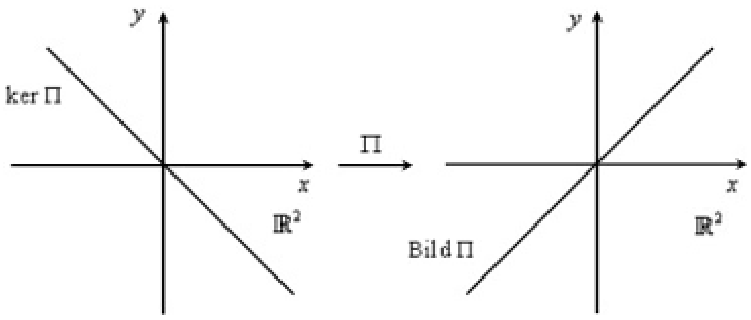
- $\mathfrak{L}(V,W) := \{A: V \to W \text{ linear}\}$

Def.: Sei $A \in \mathfrak{L}(V,W)$

$\ker A := \{\vec{u} \in V : A\vec{u} = 0\} = A^{-1}(0)$ ist UVR von *V* und heißt *Kern von A*.

$\text{Bild}\, A := \{A(\vec{u}) : u \in V\}$ ist UVR von *W* und heißt *Bild von A*.

Beispiel: $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, orthogonale Projektion auf $\{y = x\}$



Allgemeiner:

Ist $V_0 \subseteq V$ UVR, dann ist $A(V) := \{A(\vec{v}) : \vec{v} \in V_0\}$ UVR.

Ist $W_0 \subseteq V$ UVR, dann ist $A^{-1}(W_0) := \{u \in V : A(u) \in W_0\}$ UVR.

3.2 Operationen mit linearen Abbildungen

U, V, W seien Vektorräume

1. $I: V \to V$, $\vec{v} \mapsto \vec{v}$ heißt identische Abbildung (Identität)
   $0: V \to W$, $\vec{v} \mapsto 0$ heißt Nullabbildung

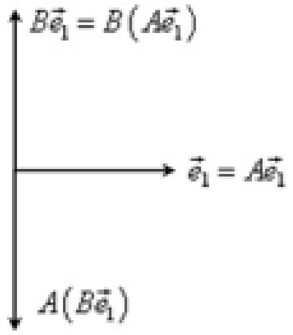
2. Sind $A, B \in \mathfrak{L}(V,W)$, dann ist
   $\lambda A: V \to W$, $\vec{v} \mapsto \lambda A(\vec{v})$ linear
   $A + B: V \to W$, $\vec{v} \mapsto A(\vec{v}) + B(\vec{v})$ linear
   $\mathfrak{L}(V,W)$ ist selbst ein Vektorraum.

3. $A: V \to W$, $B: U \to V$ sei linear. Dann ist $A \circ B: U \to W$, $\vec{u} \mapsto A(B(\vec{u}))$. Die Komposition von A mit B ($A \circ B$ ist wieder linear).

   Schreibweise: AB oder $A \cdot B$ (Produkt)

   Das Produkt ist assoziativ $(A(BC) = (AB)C)$, aber nicht kommutativ $(AB \neq BA)$.

   Beispiel: A: Spiegelung an der x-Achse; B: Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn.



   Ein Inverses braucht nicht zu existieren.

3.3 Injektive lineare Abbildungen

Satz: Sei $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Dann ist äquivalent

a. $\ker A = \{0\}$

b. A ist injektiv

Beweis:

a. $\Rightarrow$ b. Seien $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und $A\vec{u} = A\vec{v}$

$$\Rightarrow A(\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in \ker A \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$$

b. $\Rightarrow$ a. Sei $\vec{v} \in \ker A \Leftrightarrow A\vec{v} = 0 = A(0) \overset{\text{b.}}{\Rightarrow} \vec{v} = 0$ □

3.4 Die Dimensionsformel

Satz: Sei $A: V \to W$ linear, $\dim V < \infty$, dann gilt $\dim V = \dim(\text{Bild } A) + \dim(\ker A)$

Beweis:

- A sei injektiv ✓
- Sei $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k\}$ Basis von $\ker A$ mit $k = \dim(\ker A)$.

  Ergänze zu Basis $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k, \vec{b}_{k+1}, ..., \vec{b}_n\}$ von V (Basisergänzungssatz)

  Dann ist $\text{Bild } A = \text{lin}\{A(\vec{b}_1), ..., A(\vec{b}_n)\} = \text{lin}\{A(\vec{b}_{k+1}), ..., A(\vec{b}_n)\}$

  Zu zeigen ist, dass $A(\vec{b}_{k+1}), ..., A(\vec{b}_n)$ linear unabhängig sind.

  Sei $0 = \lambda_{k+1} A(\vec{b}_{k+1}) + ... + \lambda_n A(\vec{b}_n) = A\underbrace{(\lambda_{k+1}\vec{b}_{k+1} + ... + \lambda_n \vec{b}_n)}_{=\vec{v}} \Rightarrow \vec{v} \in \ker A$

  Jedes $\vec{v} \in \ker A$ ist auf eindeutige Weise Linearkombination von $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k$.

  $\Rightarrow \lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0$

  $\Rightarrow$ lineare Unabhängigkeit von $A(\vec{b}_{k+1}), ..., A(\vec{b}_n)$. □

Folgerung: Ist A injektiv $\Rightarrow \dim V = \dim(\text{Bild} V)$

Dann gilt: $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ ist Basis von $V \Rightarrow \{A(\vec{b}_1), ..., A(\vec{b}_n)\}$ ist Basis von $\text{Bild } A$.

Def.: *Der Rang* von A ist $\text{Rang } A := \dim(\text{Bild } A)$

Satz: Sei $\dim V = \dim W$, dann gilt A ist injektiv $\Leftrightarrow$ A ist surjektiv

Beweis: A ist injektiv $\Leftrightarrow \dim(\ker A) = 0 \Leftrightarrow \dim V = \dim(\text{Bild } A) = \dim W \Leftrightarrow$ A ist surjektiv

3.5 Lineare Abbildungen auf Basen

Satz: Sei $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ Basis von V und $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ Vektoren in W.

Es existiert genau eine lineare Abbildung $A: V \to W$ mit $A(\vec{b}_k) = \vec{w}_k \quad \forall k$

Beweis:

Setzte $A\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{b}_i\right):=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{w}_i$. Jeder Vektor $\vec{v}$ ist eindeutig $\vec{v}=\sum\lambda_i\vec{b}_i \Rightarrow A$ ist wohldefiniert. Insbesondere ist A eindeutig. □

Bem.: Spezialfall $V=K^n$, $\vec{b}_i=\vec{e}_i$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\sum\lambda_i\vec{e}_i\mapsto\sum\lambda_i\vec{w}_i \text{ ist Koordinatenabbildung}$$

3.6 Satz

Wie in 2.8 gilt für A:

1. $\operatorname{lin}\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n\}=W\Leftrightarrow A$ ist surjektiv
2. $\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow A$ ist injektiv
3. $\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n\}$ ist Basis von $W\Leftrightarrow A$ ist bijektiv ($\Leftrightarrow A$ ist Isomorphismus)

Beweis: In 2.8 ersetzte $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ durch $\sum\lambda_i\vec{b}_i$.

3.7 Die Matrix einer linearen Abbildung

Ziel: Einfache Beschreibung aller linearen Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen durch ein Zahlenschema (Cayley 1855 – Jänich S. 131)

Def.: Sei $\mathfrak{B}=\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$ Basis von V und $\mathfrak{B}'=\{\vec{c}_1,\dots,\vec{c}_m\}$ Basis von W, $A\in\mathfrak{L}(V,W)$ mit

$A(\vec{b}_j)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\vec{c}_i$, $j=1,\dots,n$. Dann heißt das Zahlenschema

$$M=M_A^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\cdots&\alpha_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{m1}&\cdots&\alpha_{mn}\end{pmatrix}=(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

Die $(m\times n)$-*Matrix* der linearen Abbildung A bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$.

Bemerkungen:

1. $\mathcal{B}'$ ist Basis $\Rightarrow \alpha_{ij}$ sind bestimmt durch *A*.
   Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ fest, dann ist *M* gegeben $\Rightarrow A \in \mathcal{L}(V,W)$ ist eindeutig bestimmt.
   D.h. bezüglich fester Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ besteht zwischen linearen Abbildung $A: V \to W$ und $m \times n$ Matrizen eine 1-1-Beziehung $\left(A \leftrightarrow M_A^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (\alpha_{ij})\right)$.

2. Die Bemerkung 1 gilt insbesondere für $V = K^n$ mit $\mathcal{B} = \mathcal{E}$, $W = K^n$ mit $\mathcal{B}' = \mathcal{E}'$. Dann gilt: $A \leftrightarrow M_A^{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ ist Bijektion. $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ ist kanonische Basis von K^n.

3. Merkregel: In den Spalten der Matrix M_A stehen die (Koordinaten der) Bilder der Basisvektoren.

3.8 Beispiele für Matrizen

1. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
   $W = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$
   $$A(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\vec{e}_1' + 0\vec{e}_2' + 0\vec{e}_3'$$
   $$A(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\vec{e}_1' + 2\vec{e}_2' + 0\vec{e}_3'$$
   $$M_A^{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $0: V \to W$, $\vec{v} \mapsto 0 \qquad \Rightarrow M_0^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \forall \mathcal{B}, \mathcal{B}'$
   $I: V \to V$, $\vec{v} \mapsto \vec{v} \qquad \Rightarrow M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}; A(\vec{b}_j) = \vec{b}_j$
   Bem.: $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}' \Leftrightarrow M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \neq$ Einheitsmatrix

3. $D: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Drehung
   $$M_D^{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

4. Spiegelungen

   a. In $\mathbb{R}^2$ an der x-Achse $\vec{e}_1 \mapsto \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \mapsto -\vec{e}_2$

   $$M_S^{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   b. Punktspiegelung P in $\mathbb{R}^3$

   $$M_P^{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf x-y-Ebene $\subset \mathbb{R}^3$

   $$M_\Pi^{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Skalarprodukt mit festem Vektor $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$

   $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ist linear

   $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x}, \vec{\vec{a}} \rangle$

   $M_A^{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = (a_1, ..., a_n)$

7. $M = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ gehört zu $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$

   $$\lambda \mapsto \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

3.9 Berechnung eines allgemeinen Bildvektors

Def.: Sei $M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n)$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$. Dann definieren wir das Produkt $M \cdot \vec{x} \in K^n$ durch

$$M \cdot \vec{x} := \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + ... + \alpha_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

Merkregel: $\begin{pmatrix} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \blacktriangle \\ \\ \end{pmatrix}$

Satz: Ist $A: V \to W$, $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ Basis von *V*, $\mathfrak{B}' = \{\vec{c}_1, ..., \vec{c}_m\}$ Basis von *W*, so gilt für

$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{b}_j$ mit $M = M_A^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$, dass $A(\vec{v}) = M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Spezialfall: Falls $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$ ist, gilt $A(\vec{v}) = M \cdot \vec{v}$

Beweis:

$$A(\vec{v}) = A\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{b}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j A(\vec{b}_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{c}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \lambda_j\right) \cdot \vec{c}_i$$

Die i-te Koordinate des Vektors $A(\vec{v})$ ist gleich die i-te Koordinate des Matrizenprodukts

$M_A^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

d.h. $\begin{pmatrix} \sum \alpha_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum \alpha_{mj} x_j \end{pmatrix}$ ist der Koordinatenvektor von $A(\vec{v})$. □

3.10 Beispiel

1. $M_A^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

   $A(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$

2. $D\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \end{pmatrix}$

3. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n &= y_1\\ \vdots &= \vdots\\ \alpha_{m1}x_1+\ldots+\alpha_{mn}x_n &= y_m\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix} *$$

Bezüglich kanonischer Basen $\mathcal{E}$ von K^n, $\mathcal{E}'$ von K^m beschreibt die Matrix der Koeffizienten des LGS eine lineare Abbildung A. Dann heißt *: Für $A\in\mathcal{L}(V,W)$ und $\vec{y}\in K^m$ suche $\vec{x}\in K^n$ mit $A(\vec{x})=\vec{y}$.

D.h.:

1. * ist lösbar $\Leftrightarrow \vec{y}\in \text{Bild}\,A$
2. Homogenes Gleichungssystem $A(\vec{x})=0$ hat den Lösungsraum $\ker A$.

3.11 Skalarmultiplikation und Summen von Matrizen

Gegeben sei V mit Basis $\mathcal{B}$, W mit Basis $\mathcal{B}'$ und $S,T:V\to W$ mit $M_S^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=(\alpha_{ij})_{ij}$ und $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=(\beta_{ij})_{ij}$.

Satz:

1. Für $\lambda\in K$ ist die Matrix von λS gegeben durch
$$M_{\lambda S}^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=(\lambda\alpha_{ij})_{ij}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_{11} & \cdots & \lambda\alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda\alpha_{m1} & \cdots & \lambda\alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

2. Die Matrix von $S+T$ ist gegeben durch
$$M_{S+T}^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=(\alpha_{ij}+\beta_{ij})_{ij}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn}\end{pmatrix}$$

Beweis: In der j-ten Spalte steht das λ-fache bzw. die Summe der j-ten Spalte.

3.12 Der Vektorraum $M_{m,n}$

i. $M_{m,n}$ bildet mit skalarer Multiplikation und Addition einen Vektorraum

ii. Die Elementarmatrizen $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ mit einer 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte (sonst nur 0) bilden Basis von $M_{m,n} \cdot A = \sum_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \alpha_{ij} E_{ij}$

$\Rightarrow \dim M_{m,n} = m \cdot n$

Andere Art das zu rechnen:

$M_{m,n} \to K^{m\cdot n}$

$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1n} \\ & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \mapsto (\alpha_{11},...,\alpha_{1n},\alpha_{21},...,\alpha_{m1},...,\alpha_{mn})$ ist Vektorraum-Isomorphismus

iii. Für V mit Basis $\mathfrak{B}$, W mit Basis $\mathfrak{B}'$ ist

$\mathfrak{L}(V,W) \to M_{m,n}$

$A \mapsto M_A^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus

$\Rightarrow \dim \mathfrak{L}(V,W) = m \cdot n$

(Basis $\vec{e}_j \mapsto \vec{e}_i$ alla anderen $\vec{e}\,'s \mapsto 0$ $\exists mn$ solche lin. Abbildungen)

iv. Spezialfall $W = K$, $\dim V = n$

$\mathfrak{L}(V,W) = V^*$ ist n-dimensionaler Vektorraum, der sog. Dualraum von *V* und besteht aus Linearformen auf *V*.

Ist $\mathfrak{B} = \{\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\}$ Basis von *V*, so ist die duale Basis $\mathfrak{B}^* = \{\vec{b}_1^*,...,\vec{b}_n^*\}$ gegeben durch

$\vec{b}_j^*(\vec{b}_i) = \delta_{ij}$

Matrizendarstellung sind $(1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0), (0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0), (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1)$

3.13 Matrixmultiplikation

Seien *U*, *V*, *W* Vektorräume mit den Basen $\mathfrak{B}_1 = \{\vec{a}_1,...,\vec{a}_n\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{\vec{b}_1,...,\vec{b}_m\}$, $\mathfrak{B}_3 = \{\vec{c}_1,...,\vec{c}_l\}$

$T: U \to V$ und $S: V \to W$ seinen linear mit Matrizen

$B := M_T^{\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2} = (\beta_{jk})_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le k\le n}}$

$A := M_S^{\mathfrak{B}_2,\mathfrak{B}_3} = (\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le l \\ 1\le j\le m}}$

Was ist die Matrix $S \circ T$, $M_{S\circ T}^{\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_3} = ?$

Bestimme dazu $S \circ T(\vec{a}_k)$: Sei $T(\vec{a}_k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jk} \vec{b}_j$

$$(S \circ T)(\vec{a}_k) = S\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{jk} \vec{b}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jk} S(\vec{b}_j) = \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{jk} \sum_{i=1}^{l} \alpha_{ij}\right)\vec{c}_i = \sum_{i=1}^{l} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{jk}\right)}_{=\gamma_{ik}} \vec{c}_i$$

$\Rightarrow$ Die Matrix $T' = M_{S \circ T}^{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_3}$ hat die Koeffizienten $\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_{jk}$

Merkregel:

$$\begin{pmatrix} & & \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \uparrow & \\ & \uparrow & \\ & \uparrow & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \blacktriangle & \\ & & \end{pmatrix}$$

Das Matrizenprodukt kann nur gebildet werden, falls der Spaltenanzahl der Matrix A gleich der Zeilenanzahl der Matrix B ist. Das Matrixprodukt stimmt mit dem Produkt $\text{Matrix} \cdot \text{Vektor}$ für den Fall, dass B ein Vektor ist, überein.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3.14 Rechenregeln

Falls sich die Produkte bilden lassen gilt:

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ Assoziativität

$A(B + C) = AB + AC$ Distributivität

Beweis: Für lineare Abbildungen gelten die gleichen Regeln!

1. Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:
   Selbst für $n\times n$-Matrizen gilt i. A. $AB \neq BA$

   Bsp.: $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \neq BA=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

   Observablen Ort, Impuls werden in der Quantenmechanik durch lin. Abbildungen und Matrizen *Q*, *P* ersetzt. Sie genügen den Heisenbergschen Vertauschungsrelationen: $PQ-QP=\frac{\hbar}{i}I$. Aber ihre Dimension ist unendlich.

   Das heißt für die Matrix: $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots\\a_{21}&\ddots&\\\vdots&&\end{pmatrix}$

2. Nullteiler:

   Aus $AB=0$ folgt nicht $A=0$ oder $B=0$

   Bsp.: $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&*&*\\&\ddots&*\\0&&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&*&*\\&\ddots&*\\0&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&*\\&\ddots&0\\0&&0\end{pmatrix}$$

3.15 Zusammenfassung

Sei *U* Vektorraum mit der Basis $\mathcal{B}_1=\{\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n\}$ und $\vec{u}\in U$

Sei $\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{b}_i$, dann ist $\vec{u}_{\mathcal{B}_1}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}\in K^n$ der Koordinatenvektor von $\vec{u}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$.

Sei *V* Vektorraum mit der Basis $\mathcal{B}_2=\{\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_m\}$, $T:U\to V$, dann ist $M_T^{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}=\left(T(b_1)_{\mathcal{B}_2},\ldots,T(b_n)_{\mathcal{B}_2}\right)$.

Sei *W* Vektorraum mit der Basis $\mathcal{B}_3$, $S:V\to W$, dann ist $M_{S\circ T}^{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}=M_S^{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}M_T^{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$

3.16 Inverses von Matrizen

Def.: Sei $T: V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrix $M_T^{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = M$

i. $T \in \mathcal{L}(V,W)$ heißt invertierbar $\Leftrightarrow \exists T^{-1}: W \to V$ mit $T \circ T^{-1} = I_W$, $T^{-1} \circ T = I_V$

ii. $M \in M_{m,n}$ heißt invertierbar $\Leftrightarrow \exists M^{-1} \in M_{m,n}$ mit $M \cdot M^{-1} = E_{n,n}$, $M^{-1} \cdot M = E_{m,m}$
Einheitsmatrix

T^{-1} existiert $\Leftrightarrow T$ ist bijektiv $\Leftrightarrow \dim \ker T = 0$, $\dim \operatorname{Bild} T = \dim W$ (Dimensionsformel)
$\Rightarrow M$ ist quadratisch

3.17 Basiswechsel

Gesucht ist die Matrix des Basiswechsels

Def.: Sei V Vektorraum mit den Basen $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_n\}$. Dann heißt
$S = M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *Transformationsmatrix* für den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

Eigenschaften:

1. I ist invertierbar $\Rightarrow S$ ist invertierbar
   $I = M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \underbrace{M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}_{S} \cdot \underbrace{M_I^{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}_{S^{-1}}$

   $\Rightarrow S$ ist invertierbar mit $S^{-1} = M_I^{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

2. Sei $\vec{v} \in V$, $\vec{v} = \sum \lambda_i \vec{b}_i \Leftrightarrow \vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \sum \lambda'_i \vec{b}'_i \Leftrightarrow \vec{v}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow \vec{v}_{\mathcal{B}'} = S \cdot \vec{v}_{\mathcal{B}} = M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot \vec{v}_{\mathcal{B}}$ und $\vec{v}_{\mathcal{B}} = S^{-1} \cdot \vec{v}_{\mathcal{B}'} = M_I^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot \vec{v}_{\mathcal{B}'}$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Transformation $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$: $S = M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left((\vec{b}_1)_{\mathcal{B}'}, (\vec{b}_2)_{\mathcal{B}'} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Transformation $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$: $S^{-1} = M_I^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left((\vec{b}'_1)_{\mathcal{B}}, (\vec{b}'_2)_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Probe: $S \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Stellt jede Matrix einen Basiswechsel dar?

Beh.: Sei $S \in M_{n,m}$ eine invertierbare Matrix mit der Basis $\mathcal{B} = \left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\right\}$, dann existiert eine Basis $\mathcal{B}' = \left\{\vec{b}'_1, \ldots, \vec{b}'_n\right\}$, so dass S die Transformationsmatrix $S = M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ist.

Beweis: S ist invertierbar $\Rightarrow \exists S^{-1}$, betrachte die Spalten $S^{-1} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ S\vec{p}_1 & \cdots & S\vec{p}_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$.

Setzte $\left(\vec{b}'_j\right)_{\mathcal{B}} = S\vec{p}_j$

S^{-1} ist bijektiv $\overset{3.16}{\Rightarrow} \dim \operatorname{Bild} S = n \Rightarrow \vec{b}'_j$ ist lin. unabhängig

$\overset{\dim V = n}{\Rightarrow} \left\{\vec{b}'_1, \ldots, \vec{b}'_n\right\}$ ist Basis von $V \Rightarrow S^{-1} = M_I^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \Rightarrow S = M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Also gilt sogar: Eine Matrix lässt sich als Transformationsmatrix (zwischen Basen) bezüglich des betreffenden Basis interpretieren, wenn sie invertierbar ist.

3.18 Basiswechsel für lineare Abbildungen

a. Sei $T: U \to V$, $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basis von U und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basis von V

Orginalbasen: $M := M_T^{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, Basiswechsel $S := M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $R := M_I^{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{M} & \mathcal{B} \\ R^{-1} \uparrow\downarrow R & & \downarrow S \\ \mathcal{A}' & \xrightarrow[M' = S \cdot M \cdot R^{-1}]{} & \mathcal{B}' \end{array}$$

Lin. Abbildung in transformierten Basen: $M_T^{\mathcal{A}',\mathcal{B}'} = M_I^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} M_T^{\mathcal{A},\mathcal{B}} M_I^{\mathcal{A}',\mathcal{A}} = S \cdot M \cdot R^{-1}$

b. Spezialfall $T: V \to V$ mit $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basis von V

$\Rightarrow M_T^{\mathcal{A}',\mathcal{A}'} = M_I^{\mathcal{A},\mathcal{A}'} M_T^{\mathcal{A},\mathcal{A}} M_I^{\mathcal{A}',\mathcal{A}} = S \cdot M \cdot S^{-1}$

Beispiel: Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ wie in 3.17

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$$M_T^{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}'} = M_I^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} M_T^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}} M_I^{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}} = S \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die gefundene Matrix ist diagonal. Bezüglich der $\mathfrak{B}'$ Basis wird T einfacher beschrieben als bezüglich $\mathfrak{B}$.
Im Sommersemerster (allg. Fall): Gegeben sei T $\exists$ eine Basis $\mathfrak{B}$, so dass $M_T^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}}$ diagonal ist (Eigenwertproblem).

Def.: Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen

i. Zwei Matrizen $A, B \in M_{m,n}$ heißen *äquivalent*, wenn es invertierbare Matrizen $S \in M_{m,m}$ und $R \in M_{n,n}$ gibt, mit $B = S \cdot A \cdot R^{-1}$.
$\Leftrightarrow$ A, B beschreiben dieselbe lin. Abbildung bezüglich verschiedener Basen.

ii. Zwei Matrizen $A, B \in M_{n,n}$ heißen *ähnlich*, wenn es invertierbare Matrizen $S \in M_{n,n}$ gibt, so dass gilt $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$.
$\Leftrightarrow$ A, B beschreiben dieselbe lin. Abbildung bezüglich verschiedener Basen (hier: gleiche Basis in Bild & Urbild).

3.19 Matrizen bezüglich orthonormaler Basen

Def.: Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$ Matrix

i. Dann heißt $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}$ die *transponierte Matrix* und

$A^* = \overline{A^T}$ die *adjungierte Matrix* (wenn $K = \mathbb{R} \Rightarrow A^T = A^*$).

ii. A heißt *symmetrisch*, falls $A = A^T$ gilt. Bsp.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

A heißt *selbstadjungiert*, falls $A = A^*$ gilt. Bsp.: $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

A heißt *orthogonal*, falls $K = \mathbb{R}$, $A^T = A^{-1}$ gilt. Bsp.: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

A heißt *unitär*, falls $K = \mathbb{C}$, $A^* = A^{-1}$ gilt.

Sei $T : V \to V$ skalarprodukterhaltend (d.h. $\langle T\vec{v}, T\vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$

Sei $\mathfrak{B} = \left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\right\}$ ONB (d.h. $\left\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \right\rangle = \delta_{ij}$), dann ist $\mathfrak{B}' = \left\{T\left(\vec{b}_1\right), ..., T\left(\vec{b}_n\right)\right\}$ wieder ONB, denn $\left\langle T\left(\vec{b}_i\right), T\left(\vec{b}_j\right)\right\rangle = \left\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \right\rangle = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow M := M_T^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$ ist quadratisch mit ONB in den Spalten, denn $M = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ T\left(\vec{b}_1\right)_{\mathfrak{B}'} & \cdots & T\left(\vec{b}_1\right)_{\mathfrak{B}'} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow M^* \cdot M = \begin{pmatrix} \cdots & \overline{T\left(\vec{b}_1\right)_{\mathfrak{B}'}} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \overline{T\left(\vec{b}_1\right)_{\mathfrak{B}'}} & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ T\left(\vec{b}_1\right)_{\mathfrak{B}'} & \cdots & T\left(\vec{b}_1\right)_{\mathfrak{B}'} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left\langle T\vec{b}_1, T\vec{b}_1 \right\rangle & \cdots & \\ \left\langle T\vec{b}_2, T\vec{b}_1 \right\rangle & \ddots & \\ \vdots & & \left\langle T\vec{b}_n, T\vec{b}_n \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{M^{-1} = M^*}$

Also: Ist V Vektorraum mit Skalarprodukt, dann ist S Transformationsmatrix zwischen zwei ONBs $\Leftrightarrow S^* = S^{-1}$.