Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008
19./20.06.2008

6. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G16 (Test)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

a) Für die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ einer selbstadjunigerten linearen Abbildung und die dazugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ gilt:

$$\text{i) } \lambda_i \perp \lambda_j \quad \text{ii) } v_i \perp v_j \quad \text{iii) } E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$$

b) Sei A eine beliebige $n \times n$ Matrix über $\mathbb{C}$. Warum ist AA^* diagonalisierbar? Welche der folgenden Aussagen treffen dann auf das Spektrum von AA^* zu?

$$\text{i) } \sigma(AA^*) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{ii) } \sigma(AA^*) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset \quad \text{iii) } \sigma(AA^*) \subset \mathbb{R}$$

c) Das Produkt zweier normaler / selbstadjungierter / unitärer / symmetrischer Matrizen ist normal / selbstadjungiert / unitär / symmetrisch.

Lösung:

a) i) gilt nur, wenn maximal 1 Eigenwert ungleich 0 ist.
ii) ist richtig.
iii) ist richtig.

b) AA^* ist normal und somit diagonalisierbar. Weiterhin ist das Spektrum reel.

c) Nur das Produkt unitärer Matrizen ist wieder unitär, wie folgendes zeigt:

$$\langle STv, STw \rangle = \langle S(Tv), S(Tw) \rangle \overset{T \text{ unitär}}{=} \langle Sv, Sw \rangle \overset{S \text{ unitär}}{=} \langle v, w \rangle$$

Aufgabe G17 (Definitheit)

a) Welcher der folgenden Matrizen sind positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit oder indefinit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Spur und die Determinante um die Eigenwerte zu bestimmen.

b) für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

positiv, und für welche negativ definit?

Lösung:

a) Für eine 2×2 Matrix mit den Eigenwerten λ_1, λ_2 gilt $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ und $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$.

A_1 Aus $\det(A_1) = 0$ folgt, dass mindestens ein Eigenwert verschwindet. Aus $\mathrm{tr}(A) = 5$ erhalten wir, dass nur ein Eigenwert verschwindet und der andere positiv ist. Damit ist A_1 positiv semidefinit.

A_2 Aus $\det(A_2) = 2 > 0$ erkennen wir, dass beide Eigenwerte dasselbe Vorzeichen besitzen. Wegen $\mathrm{tr}(A_2) = 5 > 0$ muss dieses Vorzeichen positiv sein, d.h. A_2 ist positiv definit.

A_3 Wegen $\det(A_3) = -1 < 0$ haben die Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen. Damit ist A_3 indefinit.

A_4 Aus $\det(A_4) = 0$ wissen wir erneut, dass mindestens ein Eigenwert verschwindet. Da $\mathrm{tr}(A_4) = -3 < 0$ ist, verschwindet nur einer und der andere ist negativ. Damit ist A_4 negativ semidefinit.

A_5 Da $\det(A_5) = 2 > 0$ ist, haben beide Eigenwerte dasselbe Vorzeichen. Da $\mathrm{tr}(A_5) = -5 < 0$ ist, sind beide negativ und A_5 ist negativ definit.

b) Wir berechenen die Determinanten der Hauptminoren. Es ist

$$\begin{aligned} \det(3) &= 3 > 0 \\ \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} &= 1 > 0 \\ \det(B) &= 2a - 1. \end{aligned}$$

Da die ersten beiden Hauptminoren positiv sind, ist die Matrix für kein $a \in \mathbb{R}$ negativ definit. Für $\det(B) > 0$ ist B positiv definit, d.h. $a > \frac{1}{2}$.

Aufgabe G18 (unitäre Matrizen)

Sei A eine orthogonale 2×2 Matrix. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass in diesem Fall $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ gilt.

a) Sei $\lambda \in \sigma(A)$ und v der zugehörige Eigenvektor. Zeigen Sie, dass

$$\lambda \in \sigma(A) \backslash \{1, -1\} \Longrightarrow \overline{v} \text{ ist EV zum EW } \overline{\lambda}.$$

b) Zeigen Sie: Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $v = c\overline{v}$, so ist $\lambda \in \{1, -1\}$.

c) Zeigen Sie, dass entweder $\sigma(A) \subset \{1, -1\}$ oder $\sigma(A) = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$ für ein $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ ist.

d) Sei A nun eine orthogonale 3×3 Matrix. Zeigen Sie, dass es mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \{1, -1\}$ von A gibt.

Lösung:

a) Es ist

$$A\overline{v} \overset{A \text{ orth.}}{=} \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\overline{v}.$$

Damit ist $\overline{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

b) Es ist

$$\overline{\lambda}\overline{v} \overset{a)}{=} A\overline{v} = Acv = cAv = c\lambda v = \lambda cv = \lambda\overline{v}.$$

Damit ist $\lambda = \overline{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \{1, -1\}$.

c) Wir wissen, dass A maximal zwei verschiedene Eigenwerte hat. Aus a) wissen wir, dass mit λ auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert ist. Ist λ nicht reell, so ist $\sigma(A) = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $\lambda = \pm 1$, so ist $\sigma(A) \subset \{1, -1\}$. Es kommen alle drei möglichen Fälle vor, wie die folgenden Beispiele zeigen:

$$\sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \{1\}, \quad \sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \{1, -1\}, \quad \sigma\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \{-1\}$$

d) Mit λ ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert. Angenommen, es gibt eine orthogonale Matrix A mit $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \backslash \{1, -1\}$, dann gibt es mindestens zwei verschiedene (auch nicht konjugierte) Eigenwerte. Denn ist $aV(\lambda) = 2$, so ist auch $aV(\overline{\lambda}) = 2$. Dies ist nicht möglich.

Somit finden wir zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 zu unterschiedlichen Eigenwerte, d.h. diese sind lin. unabhängig. Da aber mit v_1 und v_2 auch $\overline{v_1}$ und $\overline{v_2}$ Eigenvektoren sind und diese ebenfalls lin. unabhängig sind, haben wir 4 lin. unabhängige Vektoren gefunden. Dies ist ein Widerspruch.

Hausübung

Aufgabe H18 (Eigenwerte (4 Punkte))

Bestimmen Sie reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

symmetrisch ist und die Eigenwerte 0, -2 und 2 besitzt. Wie lauten zugehörige Eigenvektoren?

Lösung: Damit die Matrix symmetrisch ist, muss $b = a$ sein. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2a-\lambda & a \\ 0 & a & -\lambda \end{pmatrix} &= (-\lambda) \cdot \left((2a-\lambda)(-\lambda) - a^2\right) - 2 \cdot (2(-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 2a\lambda^2 + (4+a^2)\lambda \\ &= (-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2a\lambda - (4+a^2)). \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = a \pm \sqrt{2a^2+4}$. Also ist $a = 0$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind:

(a) für $\lambda_1 = 0$, $v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(b) für $\lambda_2 = 2$, $v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

(c) für $\lambda_3 = -2$, $v_3 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe H19 (Bilinearformen (4 Punkte))

Sei V ein Vektorraum, $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V und $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Weiter sei

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(b_1, b_1) & \cdots & f(b_1, b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(b_n, b_1) & \cdots & f(b_n, b_n) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A die Darstellungsmatrix der Bilinearform f ist, das heißt, für beliebige Vektoren $x, y \in V$ bezüglich der Basis B gilt

$$f(x, y) = x^T A y.$$

b) Zeigen Sie, dass eine Bilinearform genau dann symmetrisch ist, wenn es ihre Darstellungsmatrix ist.

Lösung:

a) Sei $x, y \in V$ beliebig. Es gelte

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis B. Das heißt

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \quad \text{und} \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j .$$

Daraus folgt mit Hilfe der Bilinearität

$$\begin{aligned} f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) &= \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i b_i, y_j b_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(b_i, b_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} = x^T A y. \end{aligned}$$

(Die Summe $\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij}$ ist gerade die i-te Komponente des Spaltenvektors Ay.)

b) Ist die Darstellungsmatrix symmetrisch, d.h. $A^T = A$, so ist

$$f(x, y) = x^T A y = x^T A^T y = (Ax)^T y = \langle Ax, y\rangle = \langle y, Ax\rangle = y^T A x = f(y, x).$$

Ist dagegen f symmetrisch, so ist wegen $f(e_i, e_j) = a_{ij}$

$$a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = a_{ji},$$

d.h. A symmetrisch.

Aufgabe H20 (unitäre Matrizen (4 Punkte))

Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1-i \\ 0 & 2i & 0 \\ 1-i & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte.

b) Bestimmen Sie eine ONB aus Eigenvektoren.

Lösung:

a) Das charakteristische Polynom ist

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - (2i+1)t^2 + (2i-1)t + 1.$$

Die Eigenwerte sind 1 und i, wobei $aV(i) = 2$ ist.

b) Die Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_i^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_i^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren sind schon orthogonal, d.h. wir erhalten die ONB

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$