Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008
05./06.06.2008

5. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Test)

a) Entscheiden Sie, welchen der folgenden Aussagen wahr ist. Hierbei bezeichnen v, w Vektoren und S, T Matrizen.

i) $\langle v, w\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ oder $w = 0$.

ii) $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

iii) $\langle Sv, w\rangle = \langle Tv, w\rangle \Leftrightarrow S = T$.

b) Nennen Sie alle Eigenwerte und deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

c) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Matrizen symmetrisch, selbstadjungiert, unitär, orthogonal oder normal ist:

Matrix	symmetrisch	selbstadjungiert	orthogonal	unitär	normal
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$					

Lösung:

a) i) falsch, ii) und iii) wahr.

b) Die Matrix hat den Eigenwert 3 mit der algebraischen Vielfachheit 3 und der geometrischen Vielfachheit 2 und den Eigenwert i mit der algebraischen Vielfachheit 2 und der geometrischen Vielfachheit 1.

c)

Matrix	symmetrisch	selbstadjungiert	orthogonal	unitär	normal
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$	X				X
$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$					X
$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$			X	X	X
$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$		X			X
$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	X			X	X
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	X	X	X	X	X

Aufgabe G14 (selbstadjungierte Matrizen)

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = M_n(\mathbb{R})$ der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$ und dessen Teilmenge

$$V_{\text{sa}} := \{A \in V : A^* = A\}.$$

a) Zeigen Sie, dass V_{sa} ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{R})$ ist.

b) Geben Sie für $n = 2$ eine Basis von V_{sa} an und bestimmen Sie die Dimension von V_{sa}.

Lösung:

a) Wir zeigen, dass für $A, B \in V_{\text{sa}}$ auch $\lambda A + \mu B \in V_{\text{sa}}$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu B)^* &= \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^* \\ &\overset{\lambda,\mu \in \mathbb{R}}{=} \lambda A^* + \mu B^* \\ &\overset{A,B \in V_{\text{sa}}}{=} \lambda A + \mu B. \end{aligned}$$

b) Für $n = 2$ und $A \in V_{\text{sa}}$ ist

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^* = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir aus $A = A^*$ die Relationen

$$a = a, \quad b = c \quad \text{und} \quad d = d.$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis und die Dimension ist 3.

Aufgabe G15 (Kern und Bild)

Gegeben sei die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_3 - v_4 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix M_T bzgl. der Standardbasen an.

b) Geben Sie die Darstellungsmatrix M_{T^*} bzgl. der Standardbasen an.

c) Bestimmen Sie Ker T und Bild(T^*) und zeigen Sie, dass Ker $T \perp$ Bild(T^*) ist.

d) Zeigen Sie allgemein, dass für eine lineare Abbildung $T : V \to W$ gilt:

$$\text{Ker } T = (\text{Bild}(T^*))^\perp \quad \text{und} \quad \text{Bild}(T) = (\text{Ker } T^*)^\perp$$

Lösung:

a) Die Bilder der Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3, e_4 sind

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt

$$M_{T^*} = (M_T)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Wir bestimmen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0$$

und erhalten

$$\text{Ker } T = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für Bild(T^*) betrachten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ v_2 \\ -v_2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\text{Bild}(T^*) = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ausrechnen der Skalarprodukte liefert Ker $T \perp$ Bild(T^*).

d) Sei $0 \neq v \in$ Ker T. Dann gilt

$$0 = \langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle.$$

Damit ist $T^* w \perp v$. Da jeder Vektor in Bild(T^*) als $T^* w$ geschrieben werden kann, ist damit Ker $T = (\text{Bild}(T^*))^\perp$.

Die Gleichung Ker $T^* = (\text{Bild}(T))^\perp$ folgt genauso.

Hausübung

Aufgabe H15 (Orthonormalbasis (4 Punkte))

Gegeben sei der $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Orthonormalbasis von lin$\{v_1, v_2, v_3\}$ an.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ in lin$\{v_1, v_2, v_3\}$ liegt und stellen Sie ihn als Linearkombination der in a) konstruierten Basis dar.

Lösung:

a) Wir erkennen, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind und erhalten als Basis

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen $\text{lin}\{v_1, v_2, v_3\}$ auf, denn es gilt

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + 3u_2 + 2u_3 \\ v_2 &= u_2 \\ v_3 &= u_2 + u_3. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Orthonormalbasis

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist

$$v = -7w_1 + 4\sqrt{2}w_2 - w_3.$$

Aufgabe H16 (Nilpotente Abbildungen (4 Punkte))
Sei $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft

$$L^n = L \circ L \circ \ldots \circ L = 0 \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert von L ist, wenn $\lambda = 0$ ist.

Bemerkung: Eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft (1) heisst *nilpotent*.

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass jeder Eigenwert von L null ist. Sei dazu λ ein Eigenwert und v ein Eigenvektor zu λ. Dann gilt

$$L^n v = L^{n-1}(Lv) = L^{n-1}(\lambda v) = \ldots = \lambda^n v.$$

Da L nilpotent ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $L^n = 0$ ist. Damit ist

$$0 = L^n v = \lambda^n v$$

für jeden Eigenvektor v. Da $v \neq 0$ ist, muss $\lambda^n = 0$ sein und damit auch $\lambda = 0$.

Wir zeigen nun, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, indem wir einen Eigenvektor konstruieren. Da L nilpotent ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $L^n = 0$ und $L^{n-1} \neq 0$ ist. Gibt es dies nicht, so ist $L = 0$ und besitzt als einzigen Eigenwert 0.
Da $L^{n-1} \neq 0$ ist, gibt es einen Vektor $0 \neq w \in \text{Bild}(L^{n-1})$, d.h. $w = L^{n-1}v$. Dann gilt

$$Lw = L(L^{n-1}v) = L^n v = 0 = 0w,$$

d.h. w ist Eigenvektor zum Eigenwert 0.

Aufgabe H17 (Eigenvektoren von selbstadjungierten linearen Abbildungen (4 Punkte))
Sei $T : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass jeweils zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen.

Hinweis: Nutzen Sie die adjungierte Abbildung und deren Eigenschaften aus.

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass selbstadjungierte Abbildungen nur reelle Eigenwerte haben. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und w ein Eigenvektor zum Eigenwert μ, so gilt

$$\begin{aligned}
&\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle \\
\Leftrightarrow\quad &\langle Tv, w\rangle \overset{T=T^*}{=} \langle v, Tw\rangle \\
\Leftrightarrow\quad &\langle \lambda v, w\rangle = \langle v, \mu w\rangle \\
\Leftrightarrow\quad &\langle \lambda v, w\rangle - \langle v, \mu w\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow\quad &\lambda\langle v, w\rangle - \overline{\mu}\langle v, w\rangle = 0 \\
\overset{\mu\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}\quad &\lambda\langle v, w\rangle - \mu\langle v, w\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow\quad &(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Da v, w Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind, ist damit $\langle v, w\rangle = 0$.