Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008
29./30.05.2008

4. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Test)

a) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

i) Eine $n \times n$ Matrix kann nicht mehr als n verschiedene Eigenwerte haben.

ii) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind linear unabhängig.

iii) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind eine Basis des Bildes der zugehörigen linearen Abbildung.

iv) Die Matrix $T - \lambda \mathbb{1}$ ist für jeden Eigenwert invertierbar.

b) Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen so, dass sie wahr werden:

v) Die geometrische Vielfachheit ist immer $\{\leq, =, \geq\}$ der algebraischen Vielfachheit.

vi) Die {*geometrische, algebraische*} Vielfachheit eines Eigenwertes λ gibt an, wie oft der Eintrag λ auf der Diagonalen der Jordanschen Normalform steht.

vii) Die Anzahl der Jordanblöcke zu einem Eigenwert entspricht der {*geometrischen, algebraischen*} Vielfachheit.

c) Die Leibnizformel stellt die Determinante einer $n \times n$ Matrix als Summe über Produkte von Koeffizienten dar. Wieviele Summanden gibt es allgemein? Wieviele dieser Summanden verschwinden mindestens in den folgenden Fällen?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}.$$

d) Welche der folgenden Matrizen sind in Jordanscher Normalform?

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) i) Richtig.
   ii) Richtig.
   iii) Falsch.
   iv) Falsch.

b) v) Richtig ist $\leq$.
   vi) Richtig ist *algebraische Vielfachheit*.
   vii) Richtig ist *geometrische Vielfachheit*.

c) Es gibt $n!$ verschiedene Permutationen von n Elementen.
Bei Matrix A gibt es in der ersten Spalte 2 Koeffizienten die verschwinden, demnach verschwinden insgesamt 12 Permutationen.
Bei Matrix B verschwinden $4! - 3! = 18$ Permutationen.
Bei Matrix C sind $2! \cdot 2!$ Permutationen ungleich 0, d.h. es verschwinden $4! - (2! \cdot 2!) = 20$.
Bei Matrix D gibt es genau eine Möglichkeit die Permutation so zu wählen, dass kein Koeffizient verschwindet, d.h. es verschwinden 23.
Bei Matrix E verschwinden 20 Permutationen.

d) Nur die zweite Matrix ist nicht in Jordanscher Normalform.

Aufgabe G11 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu jeder Matrix.

b) Geben Sie die Diagonalform der Matrizen an. Sollte dies nicht möglich sein, so begründen Sie dies.

Lösung:

a) Für Matrix A gilt:

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für Matrix B gilt

$$\lambda_1 = 4, \lambda_{2,3} = -2, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für Matrix C gilt:

$$\lambda_1 = 4, \lambda_{2,3} = -2, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Matrix A hat 2 verschiedene Eigenwerte, d.h. A ist diagonalisierbar mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Matrix B hat nicht 3 verschiedene Eigenwerte, aber die geometrischen Vielfachheiten sind gleich den algebraischen, d.h. B ist diagonalisierbar mit

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix C ist nicht diagonalisierbar, da die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes -2 kleiner ist als die algebraische.

Aufgabe G12 (Jordansche Normalform)
Wir werden in dieser Aufgabe schrittweise die Jordansche Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -3 & -8 & 1 \\ 0 & -21 & -60 & 7 \\ 0 & 7 & 20 & -2 \\ 0 & -4 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Sie gehen dazu wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

c) Bestimmen Sie eine Basis der verallgemeinerten Eigenräume.

d) Geben Sie eine Jordannormalform an.

Lösung:

a) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = (-1-\lambda)(-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4).$$

Damit ist der erste Eigenwert $\lambda_1 = -1$. Ausprobieren von $\lambda_2 = -1$ in dem Plolynom dritten Grades liefert auch dort eine Nullstelle. Durch Polynomdivision erhalten wie

$$p(\lambda) = -(1+\lambda)^2(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = (1+\lambda^2)(\lambda-2)^2.$$

Damit erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$.

b) Die algebraischen Vielfachheiten der beiden Eigenwerte sind 2. Für die geometrischen bestimmen wir die Eigenvektoren. Für den Eigenwert 2 lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -3x_1 - 3x_2 - 8x_3 + x_4 &= 0 \\ -23x_2 - 60x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 7x_2 + 18x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -4x_2 - 12x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten den Eigenvektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da wir keinen weiteren Eigenvektor zum Eigenwert 2 erhalten, ist die geometrische Vielfachheit 1.

Für den Eigenwert -1 lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -3x_2 - 8x_3 + x_4 &= 0 \\ -20x_2 - 60x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 7x_2 + 21x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -4x_2 - 12x_3 + 5x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten den Eigenvektor

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und damit ebenfalls die geometrische Vielfachheit 1.

c) Für den Eigenwert -1 bestimmen wir die Lösung des Gleichungssystems

$$(A - (-1)\mathbb{1})x = v_{-1}.$$

Wir erhalten als Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weitere (lin. unabhängige) Lösungen können wir nicht erhalten, da die algebraische Vielfachheit 2 ist.

Für den Eigenwert 2 lösen wir das Gleichungssystem

$$(A - 2\mathbb{1})x = v_{-2}.$$

Wir erhalten die Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ebenfalls erhalten wir keine weitere Lösung. Damit gilt für die verallgemeinerten Eigenräume

$$\begin{aligned} E^{(-1)} &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ E^{(2)} &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

d) Die Jordannormalform lautet

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H12 (Eigenwerte und Eigenfunktionen (4 Punkte))

Sei $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ der Vektorraum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen.

a) Sei $V \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ der zweideimensionale Untervektorraum, welcher von den Vektoren

$$f_1(x) = e^x \cos(x) \text{ und } f_2(x) = e^x \sin(x)$$

aufgespannt wird und sei $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$.
Zeigen Sie, dass der Ableitungsoperator $D : V \to V, f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung ist und geben Sie die Abbildungsmatrix $M_D^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ an.

b) Gegeben sei nun der Differentialoperator

$$D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f \longmapsto f'.$$

Bestimmen Sie zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Eigenfunktion mit Eigenwert λ.

Lösung:

a) Es gilt

$$D(\lambda f + \mu g) = \lambda f' + \mu g' = \lambda D(f) + \mu D(g).$$

Damit ist D linear.
Wir bestimmen nun die Bilder der Basisvektoren f_1 und f_2. Hier gilt

$$D(f_1) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = f_1 - f_2 \quad \text{und} \quad D(f_2) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = f_2 + f_1.$$

Damit ist

$$M_D^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Gesucht ist eine Funktion f mit $D(f) = \lambda f$, bzw. $f' = \lambda f$. Demnach ist $f(x) = e^{\lambda x}$ die gesuchte Funktion für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H13 (Funktionen von Matrizen (4 Punkte))

Ist p ein Polynom in x, d.h.

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$$

und A eine $n \times n$ Matrix, so versteht man unter $p(A)$ die Matrix

$$p(A) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j A^j.$$

a) Zeigen Sie, dass für eine $n \times n$ Matrix A und eine invertierbare Matrix S

$$S^{-1} p(A) S = p(S^{-1} A S)$$

gilt.

b) Was ist $p(A)$ für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5\ ?$$

c) Zeigen Sie, dass für einen Eigenwert λ von A die Zahl $p(\lambda)$ ein Eigenwert zu $p(A)$ ist.

Lösung:

a) Es ist

$$p(S^{-1}AS) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (S^{-1}AS)^j.$$

Für ein Monom gilt

$$(S^{-1}AS)^j = \underbrace{S^{-1}A\overbrace{S \cdot S^{-1}}^{\mathbb{1}}A\overbrace{S \cdot S^{-1}}^{\mathbb{1}}AS \cdots S^{-1}AS}_{j-\text{mal}} = S^{-1}A^jS.$$

Damit gilt insgesamt $p(S^{-1}AS) = S^{-1}p(A)S$.

b) Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} & p(A) \\ = \ & 3\begin{pmatrix} 1^4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1^3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \ & \begin{pmatrix} p(1) & 8 & 0 & 0 \\ 0 & p(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(3) \end{pmatrix} \\ = \ & \begin{pmatrix} -3 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 187 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$p(A)v = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j A^j v = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda^j v = p(\lambda)v.$$

Damit ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

Aufgabe H14 (Jordansche Normalform (4 Punkte))

Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte und geben Sie eine Jordansche Normalform dazu an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Matrix A Für das charakteristische Polynom erhalten wir

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3 + 1 - 3(2-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4.$$

Wir erhalten die Eigenwerte 1 mit der algebraischen Vielfachheit 2 und den Eigenwert 4 mit der algebraischen Vielfachheit 1. Damit ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 4 ebenfalls 1. Wir bestimmen eine Basis des Eigenraumes zum Eigenwert 1. Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0$$

Da die Matrix aus linear abhängigen Spalten besteht, ist der Rang 1 und die Dimension des Bildes, und damit des Eigenraumes 2. D.h. die geometrische Vielfachheit zum Eigenwert 1 ist 2. Wir erhalten folgende Jordansche Normalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matrix B Das charakteristische Polynom ist

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (\lambda - 2)^3.$$

Um die Eigenvektoren zum Eigenwert 2 zu bestimmen, lösen wir das folgende Gleichungssystem:

$$(A - 2\mathbb{1})v_1 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Der Lösungsraum wird von dem Vektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt, und damit ist die Dimension des Eigenraumes und die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1.

Damit muss B ähnlich zu einem Jordanblock der Grösse 3 mit Eigenwert 2 sein, d.h. die Jordansche Normalform von B ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$