Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008
08./09.05.2008

3. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker"

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Test)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind und begründen Sie ihre Entscheidung:

(i) Für die $n \times n$ Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $\det(A) = (-1)^{n^2-1}$.

(ii) Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$ ist $0, \lambda, \lambda^3$ oder λ^9?

(iii) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist invertierbar.

Lösung:

(i) Wir berechnen die Determinante. Zunächst stellen wir fest, dass für jeden Koeffizienten a_{ij} auf der Gegendiagonalen gilt: $i + j = n + 1$.

Entwickeln wir nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz nach der j. Spalte, so erhalten wir

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

wobei A_{ij} durch Streichen der i. Zeile und j. Spalte entsteht. Da alle Einträge ausser einem in der j. Spalte verschwinden, ergibt sich

$$\det(A) = (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij}}_{=1} \det(A_{ij}) = (-1)^{n+1} \det(A_{ij})$$

mit $i + j = n + 1$ wie oben beschrieben. Die Matrix A_{ij} ist vom selben *Typ* wie die Matrix A, sodass wir nach und nach jede Spalte entwickeln können. Dies geht genau $n - 1$ mal und wir erhalten dann

$$\det(A) = ((-1)^{n+1})^{n-1} = (-1)^{n^2-1}.$$

Die Aussage ist demnach richtig. Alternativ kann man dies auch mit vollständiger Induktion beweisen.

(ii) Offensichtlich sind die Zeilen linear unabhängig, sodass die Determinante 0 ist.

(iii) Wir bestimmen die Determinante. Nach der Regel von Sarrus ist

$$\det(A) = 6 + 1 + 6 - 2 - 2 - 9 = 0.$$

Demnach ist A nicht invertierbar.

Aufgabe G8 (Eigenräume)

Gegeben sei die Marix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren.

b) Bestimmen Sie alle Eigenräume.

c) Zeigen Sie, dass die Summe zweier Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nicht wieder ein Eigenvektor ist.

Lösung:

a) Wir bestimmen die Lösungsmenge von Ker $(A - \lambda\mathbb{1})$, d.h. wir lösen das System

$$\begin{aligned} (3-\lambda)x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 + (3-\lambda)x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir $x_2 = -(3-\lambda)x_1$. Einsetzen in die zweite Zeile liefert

$$\begin{aligned} 4x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4x_1 - (3-\lambda)(3-\lambda)x_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4x_1 - (9 - 6\lambda + \lambda^2)x_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (-\lambda^2 + 6\lambda - 5)x_1 = 0. \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Nullstellen von $-\lambda^2 + 6\lambda - 5$. Diese sind

$$\lambda_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-5}.$$

Damit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 3 + \sqrt{4} = 5$ und $\lambda_2 = 3 - \sqrt{4} = 1$.

b) Wir bestimmen zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor (mehr kann es nicht geben, da die Dimension nur 2 ist). D.h. wir suchen einen Vektor v, mit der Eigenschaft

$$Av = \lambda_j v,$$

bzw.

$$(A - \lambda_j\mathbb{1})v = 0,$$

d.h. eine Basis des Kernes von $A - \lambda_j \mathbb{1}$. Für $\lambda_1 = 5$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2v_1 + v_2 &= 0 \\ 4v_1 - 2v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Setzen wir $v_1 = 1$, so erhalten wir $v_2 = 2$, d.h. der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Für den zweiten Eigenwert erhalten wir das System

$$\begin{aligned} 2v_1 + v_2 &= 0 \\ 4v_1 + 2v_2 &= 0, \end{aligned}$$

welches die Lösung $v_1 = 1$ und $v_2 = -2$ hat, d.h. zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) Wir zeigen dazu allgemein, dass ein Eigenvektor zum Eigenwert λ nicht im Eigenraum des Eigenwertes μ liegen kann. Nach Definition gilt für Vektoren v im Eigenraum zu μ

$$(A - \mu\mathbb{1})v = 0.$$

Ist nun v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, so gilt

$$(A - \mu\mathbb{1})v = Av - \mu v = \lambda v - \mu v = (\lambda - \mu)v.$$

Dies ist nur 0, wenn $v = 0$ ist, oder $\lambda = \mu$. Demnach kann ein Eigenraum keine Linearkombination aus Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten enthalten.

Aufgabe G9 (Polarkoordinaten)

Gegeben sei die Umformung von kartesischen Koordinaten (x, y) in Polarkoordinaten (r, φ)

$$\begin{aligned} x(r, \varphi) &= r \cos\varphi \\ y(r, \varphi) &= r \sin\varphi. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Determinante der Jacobimatrix.

c) Bestimmen Sie den Rang von J.

Lösung:

a) Die Jacobimatrix lautet

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

b) Für die Determinanten gilt

$$\det(J) = \cos\varphi \cdot r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot \sin\varphi = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

c) Die Vektoren $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ sind für alle φ linear unabhängig. Demnach ist der Rang von der Wahl von φ unabhängig.
Die Vektoren $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$ sind für alle $r \neq 0$ ebenfalls linear unabhängig. Für $r = 0$ sind sie jedoch linear abhängig. Demnach ist

$$\mathrm{Rang}(J(r,\varphi)) = \begin{cases} 1 & : \quad r = 0 \\ 2 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Hausübung

Aufgabe H9 (Permutationen und Leibnizregel (4 Punkte))
Gegeben seien die Permutaionen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Fehlstände und das Signum von π_1 und π_2.
Erinnerung: Die Anzahl der Fehlstände ist $\#\{i < j \text{ mit } \pi(i) > \pi(j)\}$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Leibnizformel die Determinanten von

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Überlegen Sie zuerst, in welchen Permutationen keine Nulleinträge stehen.

Lösung:

a) Die Fehlstände von π_1 sind an den Postitionen $12, 14, 24, 34$, d.h. die es gibt 4 Fehlstände und es ist $\mathrm{sgn}(\pi_1) = 1$.

Für π_2 erhalten wir den Fehlstand 23, d.h. es ist $\mathrm{sgn}(\pi_2) = -1$.

b) Folgenden Eintrge der Matrix verschwinden nicht: $a_{11}, a_{31}, a_{22}, a_{24}, a_{13}, a_{33}, a_{24}, a_{44}$. Fassen wir die Indizes als Permutationen auf (d.h. a_{31} entspricht einer Permutation, welche 3 auf 1 permutiert, also $\pi(3) = 1 ist$), so erhalten wir insgesamt 4 mögliche Permutationen, welche ausschliesslich aus diesen Koeffizienten bestehen. Dies sind die Permutationen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \pi_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Fehlstände gilt $\mathrm{sgn}(\pi_1) = \mathrm{sgn}(\pi_4) = 1$ und $\mathrm{sgn}(\pi_2) = \mathrm{sgn}(\pi_3) - 1$. Demnach erhalten wir

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} a_{4\pi(4)} \\ &= \sum_{j=1}^{4} \mathrm{sgn}(\pi_j) a_{1\pi_j(1)} a_{2\pi_j(2)} a_{3\pi_j(3)} a_{4\pi_j(4)} \\ &= 1+4+1+4 = 10.\end{aligned}$$

Aufgabe H10 (Determinante (4 Punkte))

Berechnen Sie die folgenden Determinanten möglichst geschickt.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Es gilt nach dem Lapplacschen Entwicklungssatz

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} &\overset{\text{Entw. n. 1. Spalte}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Entw. n. 3. Zeile}}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Entw. n. 2. Zeile}}{=} -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot 2 = -6.\end{aligned}$$

b) Wir führen zunächst eine EZU durch, indem wir 2 mal die 1. Zeile von der 3. abziehen, somit erhalten wir

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$$

c) Da die Matrix aus Blockmatrizen zusammengesetzt ist, gilt

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}\right) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right) \det\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\right) \\ &= 10 \cdot 4 = 40.\end{aligned}$$

Aufgabe H11 (Geometrie (4 Punkte))

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der orthogonalen Projektion $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche auf die von v_1 und v_2 aufgespannte Ebene projiziert.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildung Π.

Lösung:

a) Wir wählen uns zunächst eine geeignete Basis. Diese ist zum Beispiel $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3 := v_1 \times v_2\}$. Für die Bilder der Basisvektoren gilt

$$\Pi(v_1) = v_1, \quad \Pi(v_2) = v_2 \quad \text{und} \quad \Pi(v_3) = 0. \tag{1}$$

Demnach erhalten wir die Abbildungsmatrix

$$M_\Pi^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Aus (1) lesen wir ab:

$$\Pi(v_1) = 1 \cdot v_1, \quad \Pi(v_2) = 1 \cdot v_2 \quad \text{und} \quad \Pi(v_3) = 0 \cdot v_3.$$

Demnach sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$. Die Eigenvektoren zu λ_1 sind v_1, v_2 und der Eigenvektor zu λ_2 ist v_3.