Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008
24./25.04.2008

2. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Determinante)

Es seien beliebige quadratische komplexwertige Matrizen A und B gegeben. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) $AA = \mathbb{1}_n \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

(b) A ist nicht invertierbar $\Longrightarrow AB$ ist nicht invertierbar.

(c) $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$.

(d) $A^3 = 0 \Longrightarrow A = 0$.

(e) $A^3 = 0 \Longrightarrow \det(A) = 0$.

(f) $\det(A) \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle Einträge in A sind reell.

(g) $A^3 = 0 \Longrightarrow (\mathbb{1}_n - A)^{-1} = \mathbb{1}_n + A + A^2$.

Lösung:

(a) *Richtig!*
Beh.: $A^2 = \mathbb{1}_n \Rightarrow \det(A) = \pm 1$
Bew.: Nach dem Multiplikationssatz gilt $\det(A^2) = (\det(A))^2$. Da weiterhin $\det(\mathbb{1}_n) = 1$ gilt. Also ist $1 = \det(\mathbb{1}_n) = \det(A^2) = (\det(A))^2$ und damit $\det(A) = \pm 1$.

(b) *Richtig!*
Beh.: A nicht invertierbar $\Rightarrow AB$ nicht invertierbar
Bew.: Da A nicht invertierbar ist, gilt $\det(A) = 0$. Also ist auch $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0$ und damit AB nicht invertierbar.

(c) *Falsch!*
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt $\det(A) + \det(B) = 0 + 1 = 1$, aber:

$$\det(A + B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

(d) *Falsch!*
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und damit auch $A^3 = 0$, aber $A \neq 0$.

(e) *Richtig!*
Nach dem Multiplikationssatz gilt $0 = \det(A^3) = \det(A)^3$. Demnach ist $\det(A) = 0$.

(f) *Falsch!*
Wähle $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Dann hat A nicht-reelle Einträge, aber $\det(A) = -1 \in \mathbb{R}$.

(g) *Richtig!*
Beh.: $A^3 = 0 \Rightarrow (\mathbb{1}_n - A)^{-1} = \mathbb{1}_n + A + A^2$.
Bew.: Wir müssen zeigen

$$(i)\ (\mathbb{1}_n - A)(\mathbb{1}_n + A + A^2) = \mathbb{1}_n$$
$$(ii)\ (\mathbb{1}_n + A + A^2)(\mathbb{1}_n - A) = \mathbb{1}_n$$

zu (i): $(\mathbb{1}_n - A)(\mathbb{1}_n + A + A^2) = \mathbb{1}_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = \mathbb{1}_n - A^3 = \mathbb{1}_n - 0 = \mathbb{1}_n$.
zu (ii): $(\mathbb{1}_n + A + A^2)(\mathbb{1}_n - A) = \mathbb{1}_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = \mathbb{1}_n$.

Aufgabe G5 (Spat)

Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Volumina der von a_1, a_2, a_3 und a_2, a_3, a_4 aufgespannten Spate. Deuten Sie ihr Ergebnis geometrisch.

Lösung: Für das erste Volumen V_1 gilt

$$V_1 = \left| \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \right|.$$

Wir bringen die Matrix durch EZUen vom Typ II auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \overset{II-I}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$\overset{III-I}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$\overset{III \leftrightarrow II}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{III-\sqrt{2}II}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Da wir hier nur am Betrag der Determinanten interessiert sind, brauchen wir uns um das Tauschen von Zeilen keine Gedanken machen. Damit ist

$$V_1 = \left| \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \right| = 3.$$

Für das zweite Volumen V_2 verfahren wir genauso und bringen zunächst die Matrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}+1}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix} \overset{II-I}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2}-1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}+1}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{\sqrt{2}+1}{2}\frac{1}{1-\sqrt{2}}II+III}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2}-1 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2}+3 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$V_2 = \left| \det\left(\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}+1}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix} \right) \right| = |1(1-\sqrt{2})(3\sqrt{2}+3)| = 3.$$

Da das Volumen beider Spate gleich ist und sie beide dieselbe Grundfläche nämlich das von a_2 und a_3 aufgespannte Parallelogramm haben, müssen beide dieselbe Höhe besitzen.

Aufgabe G6 (Lineares Gleichungssystem)
Bestimmen Sie für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times 3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ so, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

hat.

Lösung: Wir sammeln Eigenschaften von A. Es muss gelten:

1. $\mathrm{Kern}(A) = \{\lambda(1,1,1)^T : \lambda \in \mathbb{R}\}$ und damit $\dim(\mathrm{Kern}(A)) = 1$
2. Also ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$, wir setzen also $A = \binom{a_1}{a_2}$ mit 2 linear unabhängigen Zeilenvektoren a_1 und a_2 an.
3. Wegen 1. muss $a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ sein. Wir probieren also $a_1 = (1,-1,0)$ und $a_2 = (0,1,-1)$. Damit ist
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
4. Schließlich muss $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b$ sein, also mit obigen Ansätzen:
$$b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kandidaten sind also $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Probe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Setze $x_2 = \lambda$. Dann ist $x_1 = -1 + \lambda$ und $x_3 = 1 + \lambda$, also

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\} \text{ (mit } \mu = \lambda - 2). \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H6 (Determinante)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = A^T \qquad E = A \cdot A$$

Lösung: Wir berechnen alle Determinanten durch EZUen vom Typ II.

A: Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} &\overset{II-I}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\overset{III-2I}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\overset{III-\frac{2}{5}II}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist $\det(A) = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$.

B: Die Matrix B entsteht aus der Matrix A durch Multiplikation der zweiten Zeile mit $\frac{1}{4}$. Demnach gilt

$$\det(B) = \frac{1}{4} \det(A) = 5.$$

C: Die Matrix C entsteht aus der Matrix A Multiplikation der ersten Zeile mit -1 und anschliesendem Vertauschen der ersten beiden Zeilen. Die Multiplikation mit -1 ändert das Vorzeichen der Determinante und das Vertauschen ebenfalls, sodass

$$\det(C) = -(-\det(A)) = \det(A) = 20$$

gilt.

D: Nach Eigenschaft ($D9$) gilt $\det(D) = \det(A^T) = \det(A) = 20$.

E: Nach dem Mulitplikationssatz gilt

$$\det(E) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = 20 \cdot 20 = 400.$$

Aufgabe H7 (Lineares Gleichungssystem (4 Punkte))

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 12 & 9 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie Rang(A) und Kern(A).

(b) Bestimmen Sie die alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Lösung:

(a) Elementare Zeilenumformungen in der erweiterten Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems ergeben

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 12 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} II - 5I \\ \rightsquigarrow \\ III - I \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{c} \frac{6}{8}II + \frac{8}{6}III \\ \rightsquigarrow \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{19}{24} & 0 \end{array}\right)$$

Wir lesen direkt Rang(A) $= 3$ ab. Die Lösungen dieses Gleichungssystems bilden den Kern der Matrix A. Eine solche vom Nullvektor verschiedene Lösung erhalten wir durch die willkürliche Wahl $x_4 = 1$, dann folgt $x_3 = \frac{19}{30}$ aus III, $x_2 = \frac{7}{20}$ aus II und $x_1 = \frac{1}{2}$ aus I. Also gilt

$$\text{Kern}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{20} \\ \frac{19}{30} \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 12 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} II - 5I \\ \rightsquigarrow \\ III - I \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -6 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{c} \frac{6}{8}II + \frac{8}{6}III \\ \rightsquigarrow \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -6 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{73}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Als eine partikuläre Lösung erhalten wir beispielsweise

$$x_4 = 0, \quad x_3 = \frac{4}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_1 = -2.$$

Die allgemeine Lösung setzt sich wieder aus partikulärer Lösung und Kern zusammen, d.h.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{20} \\ \frac{19}{30} \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H8 (Zum Satz für implizite Funktionen)

Wir wollen Ihnen an einem Beispiel darstellen, was der Satz für implizite Funktionen im linearen Fall besagt (vgl. 4.14 der Vorlesung oder 4.14.2 im Skript).

Gegeben sei die Gleichung

$$ax + 2y + z = 1, \tag{1}$$

mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

(a) Es sei $M_a \subset \mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge von (1). Was ist M_a geometrisch? Für welchen Wert von a steht M_a senkrecht auf der y,z-Ebene?

(b) *Implizite Darstellung*: Geben Sie eine Funktion $f_a\colon \mathbb{R}^3 \to \ldots$ an, so dass gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_a \iff f_a(x,y,z) = 0.$$

(c) *Graphendarstellung*: Können Sie eine Funktion $x_a(y,z)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bestimmen, so dass $f_a(x,y,z) = f_a(x_a(y,z),y,z) = 0$ ist? Skizzieren Sie diesen Graphen z.B. für $a = 3$. Falls eine solche Darstellung nicht existiert (Skizze von M_a!), gibt es dann eine Graphendarstellung $y(x,z)$ oder $z(x,y)$?

(d) Schreiben Sie das Gleichungssystem (1) in der Form

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b,$$

d.h. geben Sie eine Matrix A und einen Vektor b an.

(i) Bestimmen Sie den Rang von A. Ist dieser von der Wahl von a unabhängig?

(ii) Bestimmen Sie in diesem Fall die Matrizen A_1 und A_2 aus der Vorlesung (4.14.2).

(iii) Laut Vorlesung muss A_1 so gewählt werden, dass A_1 invertierbar ist. Ist A_1 im vorliegenden Fall immer invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Spaltenvertauschung an, sodass A_1 invertierbar ist. Welcher Graphendarstellung ($y(x,z)$ oder $z(x,y)$) entspricht das?

Lösung:

(a) Die Gleichung beschreibt eine Ebene. Ist die Ebene nicht senkrecht zur yz-Ebene, so gibt es zu jedem Paar (y,z) genau ein x, sodass (1) erfüllt ist. Steht jedoch die Ebene senkrecht zur yz-Ebene, so gibt es zu jedem Paar (y,z) unendlich viele Lösungen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = 0$, d.h. wenn x beliebig ist.

(b) Anhand der rechten Seite der Äquivalenz lesen wir ab, dass $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist. Umformulieren von (1) liefert

$$ax + 2y + z = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad ax + 2y + z - 1 = 0,$$

d.h. wir setzen $f_a(x, y, z) = ax + 2y + z - 1$.

Probe: Ist ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_a$, so erfüllt er (1) und ist damit eine Nullstelle von f_a und umgekehrt.

(c) Für $a \neq 0$ existiert eine solche Darstellung. In diesem Fall können wir (1) nach x auflösen und erhalten

$$ax + 2y + z = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{a}(1 - 2y - z).$$

Damit setzen wir $x_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{1}{a}(1 - 2y - z)$. Für $a = 0$ können wir (1) nicht nach x auflösen. In diesem Falle (vgl. Teil (a)) steht die Ebene senkrecht auf der yz-Ebene.

Hier gibt es jedoch eine Graphendarstellung $y(x, z)$ bzw. $z(x, y)$. Denn für $a = 0$ wird (1) zu

$$2y + z = 1.$$

Auflösen nach y liefert $y = \frac{1}{2}(1 - z)$ und auflösen nach z liefert $z = 1 - 2y$. Damit ist $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, z) \mapsto \frac{1}{2}(1 - z)$ und $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1 - 2y$.

(d) Mit

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = 1$$

entspricht $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$ der Gleichung (1).

(i) Der Rang von A ist maximal 1. Da die Nullmatrix die einzige Matrix ist, die einen Rang kleiner als 1 hat und für jede Wahl von a die Matrix A einen Eintrag ungleich 0 enthält ist $\text{Rang}(A) = 1$.
Damit ist der Rang unabhängig von der Wahl von a.

(ii) Nach der Vorlesung ist

$$A_1 = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Die Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ ist für $a \neq 0$ invertierbar. Für $a = 0$ ist A_1 nicht invertierbar. Hier müssen wir vorher Spalten von A vertauschen. Vertauschen wir Spalten, so lösen wir nicht mehr nach x sondern nach y (Vertauschen der 1. und 2. Spalte) oder nach z (Vertauschen der ersten und dritten Spalte) auf. D.h. ist A_1 ohne Spaltentausch invertierbar, so existiert eine Funktion $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x(y, z), y, z) = 0$. Müssen wir vertauschen, so existiert diese nicht.