Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
10./11.04.2008

1. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Test)

Sei A eine $m \times n$ Matrix und $Ax = 0$ das zugehörige lineare Gleichungssystem. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent?

i) Ker $(A) = \{0\}$

ii) A ist invertierbar

iii) T_A ist injektiv

iv) T_A ist bijektiv

v) A kann durch EZUen zur Einheitsmatrix umgeformt werden.

vi) $x = 0$ ist eindeutige Lösung

vii) $\text{Rang}(A) = n$

viii) $x = 0$ ist Lösung

ix) $\text{Rang}(A) = n = m$

x) A kann durch EZUen so in Zeilenstufenform umgeformt werden, dass alle Zeilen ungleich 0 sind.

Lösung: Äquivalent sind die Aussagen i), iii), vi),vii) sowie die Aussagen ii),iv),v),ix). Die Aussage viii) ist für jedes homogene lineare Gleichungssystem richtig, aber nicht äquivalent zu einer anderen Aussage. Ebenso ist die Aussage x) nicht äquivalent zu einer anderen.

Aufgabe G2 (Inverse)

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Im Folgenden werden mit I - IV die Zeilen der Matrizen bezeichnet.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV+I} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II\leftrightarrow I} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II+IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV+2III} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III+IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II+2III} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -\frac{12}{5} & \frac{14}{5} & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II-5IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I+2II} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -\frac{9}{5} & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I-III} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2]{I-IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right).$$

Damit erhalten wir

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & -8 \\ -7 & 4 & 2 & -3 \\ -6 & 7 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3 (Lineares Gleichungssystem)
Bestimmen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

die Dimension des Lösungsraumes und geben Sie den Lösungsraum an.

Lösung: Die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Matrix (A, b) des Gleichungssystems sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \qquad (A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right).$$

Durch elementare Zeilenumformungen ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{II-2I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{III-3I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist $\mathrm{Rang}(A) = 1$. Durch Rückwärtseinsetzen erhält man

$$\begin{aligned} x_3 &:= t, \\ x_2 &:= s, \\ x_1 &= -2s - 3t \end{aligned}$$

für $s, t \in \mathbb{R}$. Der Lösungsraum dieses LGS ist also

$$L_1 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hausübung

Aufgabe H3 (Normalform (4 Punkte))

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 8 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bringen Sie A in Zeilenstufenform.

b) Bringen Sie A durch EZUen und ESUen in Normalform (siehe Hauptsatz 4.6, Punkt 3).

Lösung:

a) Wir bringen die Matrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 8 & 10 & 3 \end{pmatrix} \overset{II+\frac{2}{3}I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & \frac{10}{3} & 5 \\ 8 & 10 & 3 \end{pmatrix} \overset{III-\frac{8}{3}I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & \frac{10}{3} & 5 \\ 0 & \frac{10}{3} & -5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II+III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & \frac{10}{3} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}I, \frac{10}{3}II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Wir transformieren nun weiter in Normalform, hierbei beizeichnen $I - III$ die Spalten.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{III-I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II-\frac{5}{3}I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-\frac{3}{2}II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H4 (paramterabhängiges Gleichungssystem (4 Punkte))

Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & (\lambda-1)x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

a) keine,

b) genau eine,

c) mehrere Lösungen?

Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen!

Lösung: Wir haben ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 2 & \lambda - 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da wir ein homogenes LGS haben, ist $x = 0$ immer eine Lösung, sodass der Fall a) nicht eintreten kann.

Fall b) tritt genau dann ein, wenn A invertierbar ist und Fall c) genau dann, wenn A nicht invertierbar ist.

Durch elementare Zeilenumformungen erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 2 & \lambda - 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \underset{III-2I}{\overset{II-I}{\rightsquigarrow}} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda+3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{-3(III - \tfrac{\lambda+3}{3} II)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda^2+5\lambda \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn $\lambda^2 + 5\lambda \neq 0$ ist, d.h. wenn $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0, 5\}$ ist.

$\boxed{\lambda = 0}$**:** In diesem Fall ist

$$(A_0, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das LGS ist überbestimmt und somit lösbar. Durch Rückwärtseinsetzen erhält man die Lösungen

$$L_0 = \left\{ \frac{s}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\boxed{\lambda = -5}$**:** In diesem Fall ist

$$(A\_5, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das LGS ist wieder überbestimmt und somit lösbar. Durch Rückwärtseinsetzen erhält man die Lösungen

$$L_{-5} = \left\{ s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\boxed{\lambda \neq -5, 0}$**:** Das LGS ist eindeutig lösbar und die Lösung ist

$$x_\lambda = \frac{1}{\lambda^2 + 5\lambda} \begin{pmatrix} -2\lambda - 2 \\ -\lambda - 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H5 (Rang (4 Punkte))

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $\text{lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Lösung: Wir schreiben die 4 Vektoren in eine Matrix $A = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 12 & 9 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} II - 5I \\ \rightsquigarrow \\ III - I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \frac{6}{8}II + \frac{8}{6}III \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{2} & \frac{73}{12} \end{pmatrix}$$

Wir lesen direkt $\text{Rang}(A) = 3$ ab. Demnach ist $\dim(\text{lin}\{v_1, \dots, v_4\}) = 3$ und eine Basis ist

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -\frac{17}{12} \end{pmatrix}.$$