Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008
03./04.04.2008

0. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

Hausübung

Aufgabe H1 (Zeilenstufenform (4 Punkte))

Bringen Sie die folgenden Matrizen durch EZUen in Zeilenstufenform und geben Sie bei jedem Schritt die EZU an.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir transformieren die Matrix A in Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \overset{II-2I}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-3I}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \overset{III-II}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir transformieren nun B in Zeilenstufenform:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{II-4I}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{III-2I}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-II}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2 (Inverse (4 Punkte))

Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung: Für die Matrix A gilt:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II+I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{I-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Daraus folgt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Matrix B gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II-I \\ III-I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{2}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{II\leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{III+II \\ I-4II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{I-3III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Daraus folgt

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$