Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 08
26./27.06.2007

Probeklausur „Lineare Algebra für Physiker“

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punktzahl	7	4	10	7	13	4	10	55	
erreichte Punktzahl									

1. Aufgabe(Test) (7 Punkte)

Jede Aufgabe ist mit "wahr" oder "falsch" zu beantworten. Tragen Sie Ihre Antwort durch ein entsprechendes Kreuz in die nachfolgenden Kästchen ein. Eine richtige Antwort gibt 0.5 Punkte, eine falsche −0.5 Punkte. Keine Antwort gibt 0 Punkte. In einer Unteraufgabe a), b) oder c) können nicht weniger als 0 Punkten erzielt werden. Keine Begründung notwendig!

a) Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$ und $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, x \mapsto Ax$ die induzierte lineare Abbildung. Weiter sei $0 \neq b \in \operatorname{Bild}(T_A)$. Entscheiden Sie:

	Wahr	Falsch
$Ax = b$ ist stets lösbar.	☐	☐
$Ax = b$ ist niemals lösbar.	☐	☐
$Ax = b$ ist nicht immer lösbar.	☐	☐
$Ax = b$ ist stets eindeutig lösbar.	☐	☐

b) Seien A, B $n \times n$ Matrizen mit $n \geq 2$. Dann gilt immer

	Wahr	Falsch
$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$	☐	☐
$\det(AB) = \det(A) + \det(B)$	☐	☐
$\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$	☐	☐
$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$	☐	☐

c) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Für $x, y \in V \backslash \{0\}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelte
$$T(x) = \lambda x \quad \text{und} \quad T(y) = \mu y.$$
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr ist:

	Wahr	Falsch
$x + y$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda + \mu$	☐	☐
$-5y$ ist Eigenvektor zum Eigenwert -5μ	☐	☐
$x = y \Rightarrow \lambda = \mu$	☐	☐
$\lambda \neq \mu \Rightarrow x, y$ sind linear unabhängig	☐	☐
x, y sind linear unabhängig $\Rightarrow \lambda \neq \mu$	☐	☐
$\lambda x + \mu y$ ist Eigenvektor von T	☐	☐

Lösung:

a) wahr
falsch
falsch
falsch

b) falsch
falsch
falsch
wahr

c) falsch
falsch
wahr
wahr
falsch
falsch

2. Aufgabe(Vektoren in einer Ebene) (4 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}^3$ und seien $x, y, z \in V$. Zeigen Sie, dass die Vektoren
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$
genau dann in einer Ebene liegen, wenn $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$ ist.

Lösung: Ist
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0,$$

so ist die Familie $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, x, y, z\}$ lin. abhängig. Jedoch ist der Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ offensichtlich linear unabhängig zu $\{x, y, z\}$ ist, müssen $\{x, y, z\}$ lin. abhängig sein, d.h. in einer Ebene liegen.

Liegen andererseits x, y, z in einer Ebene, so sind sie lin. abhängig und die Determinante ist 0.

3. Aufgabe(Basiswechsel) (10 Punkte)

Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit kanonischer Basis $\mathcal{E}$ und $F: V \to V$ die Spiegelung an der durch die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ aufgespannten Ebene.

a) Sei $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

b) Bestimmen Sie $M_F^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ und $M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$. Beachten Sie die Konvention $M_T^{\mathrm{alt},\mathrm{neu}}$.

d) Bestimmen Sie $M_F^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$.

Lösung:

a) Wir lösen

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$$

und erhalten als einzige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

b) Der Vektor $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Ebene, d.h.

$$M_F^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

c) Die Transformationsmatrizen sind

$$M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\1 & 1 & -2\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

d)

$$M_F^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe(Ähnliche Matrizen) (7 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und $R, T: \ V \to V$ lineare Abbildungen.

a) Bestimmen Sie die Determinante ihrer Abbildungsmatrizen bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$:

$$M_R^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} , \quad M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} .$$

b) R und T heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare lineare Abbildung $S: \ V \to V$ gibt, sodass $T = S^{-1}RS$. Sind R und T ähnlich? Geben Sie eine Begründung.

Lösung:

a) Die Determinanten sind -2 und 224.

b) Für ähnlich Matrizen R, T gilt

$$\det(T) = \det(S^{-1}RS) = \det(S^{-1})\det(R)\det(S) = \det(R).$$

Demnach können die Matrizen nicht ähnlich sein.

5. Aufgabe(Eigenwerte und Eigenvektoren) (13 Punkte)

a) Berechnen Sie fürdie nachfolgende Matrix das charakteristische Polynom, sowie alle Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & i \end{pmatrix} .$$

b) Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix an, die einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit $gV(\lambda) = 1$ und algebraischer Vielfachheit $aV(\lambda) = 3$ besitzt (mit Begründung, d.h., mit Angabe des charakteristisches Polynom und aller Eigenvektoren).

Lösung:

a) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 4, \lambda_{2/3} = i \pm 2$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{i+2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{i-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

b) Der Jordanblock

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

erfüllt die Voraussetzungen. Das charakteristische Polynom ist

$$p(t) = (\lambda - t)^3$$

und der Eigenvektor ist

$$v_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

6. Aufgabe(Diagonalisierbarkeit) (4 Punkte)
Welche Matrix besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren?

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung: Die Matrix A ist selbstadjungiert und damit normal, d.h. sie besitzt eine ONB aus Eigenvektoren.

Die Matrix B ist in Jordannormalform mit einem Jordanblock der Länge 1 zum EW 2 und einem Jordanblock der Länge 2 zum EW 0, damit ist sie nicht diagonalisierbar.

7. Aufgabe(Matrizen) (10 Punkte)
Welche der folgenden Matrizen sind symmetrisch, selbstadjungiert, orthogonal, unitär, normal? Achtung: eine Matrix kann auch mehrere Eigenschaften haben.Kreuzen Sie bitte in der nachfolgenden Tabelle alle Eigenschaften an, die erfüllt sind. Für jede falsche Antwort gibt es -0.5 Punkte. Keine Begründung notwendig!

Matrix	symmetrisch	selbstadjungiert	orthogonal	unitär	normal
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$					

Lösung:

Matrix	symmetrisch	selbstadjungiert	orthogonal	unitär	normal
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	x	x			x
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$		x			x
$\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$	x				x
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$					x
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	x	x	x	x	x
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	x			x	x
$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$			x	x	x