Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
19./20.06.2008

6. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G16 (Test)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

a) Für die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ einer selbstadjunigerten linearen Abbildung und die dazugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ gilt:

$$\text{i) } \lambda_i \perp \lambda_j \quad \text{ii) } v_i \perp v_j \quad \text{iii) } E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$$

b) Sei A eine beliebige $n \times n$ Matrix über $\mathbb{C}$. Warum ist AA^* diagonalisierbar? Welche der folgenden Aussagen treffen dann auf das Spektrum von AA^* zu?

$$\text{i) } \sigma(AA^*) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{ii) } \sigma(AA^*) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset \quad \text{iii) } \sigma(AA^*) \subset \mathbb{R}$$

c) Das Produkt zweier $\begin{array}{l}\text{normaler}\\ \text{selbstadjungierter}\\ \text{unitärer}\\ \text{symmetrischer}\end{array}$ Matrizen ist $\begin{array}{l}\text{normal}\\ \text{selbstadjungiert}\\ \text{unitär}\\ \text{symmetrisch}\end{array}$.

Aufgabe G17 (Definitheit)

a) Welcher der folgenden Matrizen sind positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit oder indefinit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Spur und die Determinante um die Eigenwerte zu bestimmen.

b) für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

positiv, und für welche negativ definit?

Aufgabe G18 (unitäre Matrizen)

Sei A eine orthogonale 2×2 Matrix. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass in diesem Fall $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ gilt.

a) Sei $\lambda \in \sigma(A)$ und v der zugehörige Eigenvektor. Zeigen Sie, dass

$$\lambda \in \sigma(A) \backslash \{1, -1\} \Longrightarrow \overline{v} \text{ ist EV zum EW } \overline{\lambda}.$$

b) Zeigen Sie: Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $v = c\overline{v}$, so ist $\lambda \in \{1, -1\}$.

c) Zeigen Sie, dass entweder $\sigma(A) \subset \{1, -1\}$ oder $\sigma(A) = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$ für ein $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ ist.

d) Sei A nun eine orthogonale 3×3 Matrix. Zeigen Sie, dass es mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \{1, -1\}$ von A gibt.

Hausübung

Aufgabe H18 (Eigenwerte (4 Punkte))
Bestimmen Sie reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

symmetrisch ist und die Eigenwerte 0, -2 und 2 besitzt. Wie lauten zugehörige Eigenvektoren?

Aufgabe H19 (Bilinearformen (4 Punkte))
Sei V ein Vektorraum, $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V und $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Weiter sei

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(b_1, b_1) & \cdots & f(b_1, b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(b_n, b_1) & \cdots & f(b_n, b_n) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A die Darstellungsmatrix der Bilinearform f ist, das heißt, für beliebige Vektoren $x, y \in V$ bezüglich der Basis B gilt

$$f(x, y) = x^T A y.$$

b) Zeigen Sie, dass eine Bilinearform genau dann symmetrisch ist, wenn es ihre Darstellungsmatrix ist.

Aufgabe H20 (unitäre Matrizen (4 Punkte))
Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1-i \\ 0 & 2i & 0 \\ 1-i & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte.

b) Bestimmen Sie eine ONB aus Eigenvektoren.